第一章 向量代数

1. 已知平行四边形$ABCD$的对角线为$\overrightarrow{AC}=\alpha$，$\overrightarrow{BD}=\beta$,求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$。

2. 设AD，BE，CF是ΔABC的三条中线，已知向量$\overrightarrow{AB}=\alpha$，$\overrightarrow{AC}=\beta$，求$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CF}$。

3. 向量α，β必须满足什么几何性质，以下各式才成立：

① $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$；　　②$\alpha+\beta=\lambda(\alpha-\beta)$

③ $|\alpha+\beta|=|\alpha|-|\beta|$；　　④ $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|$

4. 设M是ΔABC的重心。证明：对任意一点O，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)。$$

5. $A_1A_2\cdots\cdots A_n$是平面上的正多边形，O是中心。证明：

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots\cdots\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}\ 。$$

6. 证明三角形的 3 个定点的重心在每一条中线上，从而说明三角形的重心就是它的三个顶点的重心。

7. 作图题：

① 作任意给定的 6 点：A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6的重心；

② 作任意给定的 5 点：A_1,A_2,A_3,A_4,A_5的重心。

8.设$\mathrm{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$和$\mathrm{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$是空间中的两个点组。证明：对于一一对应$f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$，向量$\overrightarrow{A_1f(A_1)}+\overrightarrow{A_2f(A_2)}+\cdots+\overrightarrow{A_nf(A_n)}$是相同的。（和$f$的选择无关）。

9.证明：三点A,B,C共线的充分必要条件是：存在不全为 0 的数λ,μ,ν，使得$\lambda+\mu+\nu=0$，并且$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=0$，其中 O 是任意点。

10.设$\overrightarrow{AB}=\alpha+5\beta,\overrightarrow{BC}=-2\alpha+8\beta,\overrightarrow{CD}=3(\alpha-\beta)$。证明$A,B,D$三点在同一直线上。

11.已知向量$\alpha=e_1-2e_2+3e_3,\beta=2e_1+e_2,\gamma=6e_1-2e_2+6e_3$,问$\alpha+\beta$和$\gamma$是否共

线。

12.试说明下列每组空间向量，哪组里的向量线性无光关，哪组里的向量线性相关？

(1) $\alpha(\alpha\neq0)$；

(2) $\alpha,0$；

(3) α,β,γ，其中α,β平行；

(4) α,β,γ,ξ中，每三个不共面。

13.设平行四边形的三个顶点的向径分别为α,β,γ，求第四个顶点的向径和对角线交点的向径用α,β,γ表示的关系式。

14.已给向量$\alpha=\{2,1,-1\}$，$\beta=\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},1\right\}$。求向量$3\alpha-2\beta$的坐标。

15.设α，β不共线，α，β，γ有公共起点，且$\gamma=\mathrm{a}\alpha+\mathrm{b}\beta$。问系数a，b应满足什么条件，才能使向量$\alpha$，$\beta$，$\gamma$的终点在一条直线上。

16.设A,B,C是共线的三个不同的点，证明：

(1)$(A,B,C)(B,A,C)=1$；

(2)$(A,B,C)+(A,C,B)=-1$。

17.设α，β，γ不共面，α，β，γ，ξ有公共起点，且$\xi=\mathrm{a}\alpha+\mathrm{b}\beta+\mathrm{c}$，问系数a，b，c应满足什么条件，才能使向量$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\xi$的终点在同一平面。

21.设E是$\triangle ABC$的BC边上的点，D是线段AE上的点。对于与A,B,C不共面的点O，有分解式：

$$OD=\lambda OA+\mu OB+\nu OC\ (\lambda+\mu+\nu=1),$$

求(A,E,D)，(B,C,E)。

18.已知A,B,C共线，其中A,B不重合，并且$(A,B,C)=\frac{5}{2}$，由设在一个仿射坐标系中，点A,C的坐标分别为$(3,7,3)$，$(8,2,3)$，求B的坐标。

19.设在一个空间仿射坐标系中，向量α,β,γ的坐标依次为：(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)，证明如果α,β,γ共面，则

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0。$$

20.设在一个空间仿射坐标系中，点A,B,C的坐标依次为：(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)，证明A,B,C如果共线，则

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0。$$

21.设$|\alpha|$=3，$|\beta|$=2，$\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，求 $3\alpha+2\beta$和$2\alpha-5\beta$的长度，并求出他们的内积。

22.若向量$\alpha+3\beta$垂直与向量$7\alpha-5\beta$，且向量$\alpha-4\beta$垂直与向量$7\alpha-2\beta$，求向量α，β间的角度。

23.设$\triangle ABC$的角A为 45°，$|AB|=3$，$|AC|=2$，D在 BC上，$(B,C,D)=2$，求$|AD|$。

24.设向量α,β,γ共面，其中 α,β不平行，证明：如果 $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma=0$，则$\gamma=0$。

25. 设向量$\alpha,\beta,\gamma,\delta$满足$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$，证明：

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2+\delta^2\Leftrightarrow(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\gamma)=0$$

$$\alpha^2+\gamma^2=\beta^2+\delta^2\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)=0$$

$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\delta^2\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)=0。$$

26.证明：

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2);$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2.$$

27.求向量$\alpha=\{1，1，1\}$的长度，方向余弦，并求α与同方向的单位向量。

28.已给向量$\alpha=\{3,1,2\}$，$\beta=\{2,7,4\}$，$\gamma=\{1,2,1\}$。求$\alpha^2(\beta\bullet\gamma)$。

29.证明：如果一个四面体有两对对棱互相垂直，则第三条对棱也互相垂直，并且三对对棱的长度平方和相等。

30.在空间右手直角坐标系中，向量α,β,γ的坐标依次为：$(1,0,-1)$，$(1,-2,0)$，$(-1,2,1)$，求$(3\alpha+\beta-\gamma)\times(\alpha-\beta+\gamma)$的坐标。

31.证明等式$(\alpha\times\beta)^2+(\alpha\bullet\beta)^2=\alpha^2\beta^2$。

32.已知向量α,β,γ满足$\alpha+\beta+\gamma=0$，证明

$$\alpha\times\beta=\beta\times\gamma=\gamma\times\alpha。$$

33.已知α,β,γ不共面，并且构成右手系，$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle=\langle\beta,\gamma\rangle=60^{\circ}$，求$\langle\alpha\times\beta,\gamma\rangle$。

34.证明对于任意的 3 个向量α,β,γ，

$$\alpha\times(\beta\times\gamma)+\beta\times(\gamma\times\alpha)+\gamma\times(\alpha\times\beta)=0。$$

35.如果α和β不共线，系数a 为什么值时，向量γ=aα+5β和ξ=3$\alpha-\beta$共线？

36.三角形的顶点是$\mathrm{A}(3,4,-1)$，$\mathrm{B}(2,0,3)$，$\mathrm{C}(-3,5,4)$，求这三角形的面积。

37.证明$(\alpha\times\beta)\gamma=(\alpha\times\beta)(\gamma+\mathrm{a}\alpha+\mathrm{b}\beta)$，其中a， b 为任意实数。

38.若向量α，β，γ满足关系：$\alpha\cdot\beta=\alpha\bullet\gamma,\ \alpha\times\beta=\alpha\times\gamma,$试说明三向量间的关系。

39.计算以向量$\alpha=\mathrm{e}_1-3\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3,\ \beta=2\mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2-3\mathrm{e}_3$和$\gamma=\mathrm{e}_1+2\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3$为相邻三棱的平行六面体的体积，这里$\mathrm{e}_1$，$\mathrm{e}_2$，$\mathrm{e}_3$是互相垂直的单位向量。

40.四面体的顶点是$\mathrm{A}(1,1,0)$，$\mathrm{B}(0,1,1)$，$\mathrm{C}(-1,0,1)$，$\mathrm{D}(0,0,-1)$，求它的体积以及从顶点 A 所作的高。

41.设α是非零向量，β和α垂直，已知向量ξ满足$\alpha\bullet\xi=c$，$\alpha\times\xi=\beta$，证明$\xi=\dfrac{c\alpha-\alpha\times\beta}{|\alpha|}$。

42.证明：$\alpha\times(\beta\times(\gamma\times\delta))=(\alpha,\gamma,\delta)\beta-(\alpha\bullet\beta)(\gamma\times\delta)$。

43.证明：

$$\left(\alpha\times\beta\right)\cdot\left(\gamma\times\delta\right)+\left(\alpha\times\delta\right)\cdot\left(\beta\times\gamma\right)+\left(\alpha\times\gamma\right)\cdot\left(\delta\times\beta\right)=0$$

44.已给向量$\alpha=\left(3,0,-1\right)$，$\beta=\left(2,4,3\right)$，$\gamma=\left(1,3,2\right)$，$\xi=\left(2,0,1\right)$，计算$\left(\alpha\times\beta\right)\times\gamma$和$\left(\alpha\times\gamma\right)\cdot\left(\beta\times\gamma\right)$。

第二章 直线与平面

1. 在一个空间直角坐标系中，方程$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$的图像是球面的充分必要条件是什么？
2. 说明下列曲线都在一个球面上：

$$(1)\begin{cases}x=3\sin\phi,\\ y=4\sin\phi,\\ z=5\cos\phi;\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}x=t\big/\left(1+t^2+t^4\right),\\ y=t^2\big/\left(1+t^2+t^4\right),\\ z=t^3\big/\left(1+t^2+t^4\right);\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}x^2+3y^2+5z^2=5,\\ 2y^2+4z^2=3.\end{cases}$$

3. 在一个空间直角坐标系中，下列方程的图像是什么？

$$(1)\left(x^2+y^2+z^2-9\right)\left(x^2+y^2+z^2-4\right)=0;$$

$$(2)\left(x^2+y^2+z^2-25\right)+\left[\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-2\right)^2-16\right]^2=0.$$

4. 下列各组条件能不能决定一张平面？为什么？要添加什么要求才可以？
   ⑴ 过空间的三个不同点；　⑵ 过空间的一点和一条直线；
   ⑶ 过空间的两条不同直线。

5. 求由下列各条件所确定的平面的法向量和平面的一般方程。

⑴ 经过点 $A(1,2,3)$ 且垂直于 AB，其中点 $B(-7,2,-1)$；

⑵ 平行于 y 轴且通过点 $(1,-5,1)$ 和 $(3,2,-2)$；

⑶ 平行于平面 xOy 且通过点 $(3,2,-7)$。

6. 一平面通过点 $(5,-7,4)$，且它在个坐标轴上的截距相等，求这平面的方程。

7. 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C,D 都不等于 0）与三个坐标平面构成的四面体的体积。

8. 一四面体在第二卦限内，它的三个面与坐标平面相合，第四个面与 x 轴，y 轴，z 轴的交点为 A,B,C。已知 $AB=6, BC=\sqrt{29}, CA=5$，求平面的方程。

9. 画出下列各平面的图形，并指出它们的位置特点：

⑴ $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1;$ ⑵ $2y-3z+2=0;$

⑶ $z=-3.$

10. 一平面通过点 $(5,-4,3)$ 和 $(4,7,2)$，且垂直于平面：$3x-7y+5z-21=0$，求它的方程。

11. 一平面平行于平面 $3x-7y+5z-12=0$，且通过点 $(4,-7,1)$，求它的方程。

12. 决定参数 k 的值，使平面 $x+ky-2z-9=0$ 与平面 $2x-3y+z+14=0$ 交成 $\dfrac{\pi}{4}$ 的角。

13. 求通过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 的交角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面方程。

14. 求点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离。

15. 判别下列各对平面的位置关系：

$(1)\ x+y-z-2=0$ 和 $2x+6y-2z-2=0$；

$(2)\ x+y+3z-4=0$ 和 $x+3y+z-4=0$。

16. 在一个仿射坐标系中，三张平面的方程为

$$\pi_1: ax+y+z+1=0,$$

$$\pi_2: x+ay+z+2=0,$$

$$\pi_3: x+y-2z+3=0,$$

在 a 为什么数时，它们不相交于一点，又互相不平行。

17. 设在一个仿射坐标系中，三张平面的方程为

$$\pi_i : Ax + By + Cz + D_i = 0, i = 1,2,3,$$

其中 D_1, D_2, D_3 互不相等，又设一条直线和它们相交，交点为 P，Q，R，求 (P,Q,R)，

（其中，简单比 $(\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{\overrightarrow{\mathrm{RQ}}}$）。

18. 设在一个仿射坐标系中，两张平行平面的方程为

$\pi_i : Ax + By + Cz + D_i = 0, i = 1,2,$ 求和它们距离相等的点的轨迹。

19. 设在一个仿射坐标系中，给定了两张平行平面的一般方程为：

$$\pi_1 : 3x - 2y + 5z + 2 = 0 \text{ 和 } \pi_2 : 6x - 4y + 10z - 5 = 0,$$

求到 π_1 的距离和到 π_2 的距离为 2：1 的点的轨迹。

20. 把下列直线的一般方程化为标准方程：

$$(1)\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ y + 2z = 0; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0, \\ 4y + 3z + 1 = 0; \end{cases}$$

21. 判别下列各组直线和平面的位置关系，如果相交则求出交点：

⑴直线 $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$，平面 $x - 2y + 3z + 5 = 0$；

⑵直线 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-8}{2}$，平面 $x + y - z + 6 = 0$。

22. 设直线 $l \begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 5y - z + 2 = 0, \end{cases}$ 求过 l 的平面 π 的方程，使得 π 还满足下列条件：

⑴ 过原点；

⑵ 平行于 y 轴。

23. 判断下列各对直线的位置互相关系：

$$(1)\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-2}{1}, \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3};$$

(2) $\begin{cases}2x-2y+z-3=0\\x+y+2z+1=0,\end{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}.$

24. 决定 a,b,s,t 的值，使得直线 $\dfrac{x+3}{a}=\dfrac{y-s}{b}=\dfrac{z-t}{1}$ 和直线 $\begin{cases}3x-y+z-2=0\\x-2z+1=0,\end{cases}$ 重合。

25. 在空间仿射坐标系中，直线 l_1,l_2 分别有一般方程如下：

$$\begin{cases}2x+y-z+1=0,\\x-y+2z=0,\end{cases}\begin{cases}3x-z+1=0,\\y+2z-2=0.\end{cases}$$

⑴写出经过 l_1，并且平行于 l_2 的平面的方程；

⑵求出与 l_1,l_2 都共面，并且平行于向量 $u(1,2,1)$ 的直线的方程。

26. 试确定下列直线和平面的位置关系，若相交，求出它们的交点和交角：

⑴ $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3},4x-2y-2z-3=0;$

⑵ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7},3x-2y+7z-8=0.$

27. 求下列各对直线间的夹角的余弦：

⑴ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{7},\dfrac{x+6}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1};$

⑵ $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-2y+z+1=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}x-y-z-1=0\\x-y+2z+1=0.\end{cases}$

28. 设直线 l_1,l_2 都给出了一般方程

$$l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0,\end{cases}$$

⑴证明：

$$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_4&B_4&C_4\end{vmatrix}=0.$$

⑵证明如果 l_1,l_2 异面，则

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

⑶证明l_1, l_2共面，其充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

29. 求所有与直线

$$l_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}, l_2: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{-2}$$

都相交，并且平行于平面$2x+3y-5=0$的直线所构成的图形的方程。

30. 已知两平行直线$\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-5}{-1}, \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+9}{-1}$。在这两直线所决定的平面上引一条直线与它们平行，且平分它们之间的距离。

31. 确定下列各组平面的相互位置的关系：

⑴ $x+2y-3z=0, 3x+6y-9z+10=0, 2x+4y-6z-1=0;$

⑵ $5x-2y+4=0, 3x+z-5=0, 8x-2y+z+7=0.$

32. 证明：在直角坐标系中，方程

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

的图像是经过点(x_0, y_0, z_0)，垂直于平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的平面。

33. 在空间直角坐标系中，求下列各点到平面的距离：

⑴点$(2,1,0)$，平面$3x-4y-5z+1=0;$

⑵点$(2,4,-1)$，平面$x-z-1=0.$

34. 在空间直角坐标系中，点 D 的坐标为$(2,3,1)$，A, B, C是平面

$3x-2y-6z-4=0$ 上的三个点，使得 $\triangle ABC$ 的面积为 4，求四面体 $ABCD$ 的体积。

35. 在空间直角坐标系中，两张平行平面的方程分别为 $2x-2y+z+5=0$ 和 $2x-2y+z-1=0$，求它们之间的距离。

36. 在空间直角坐标系中，求经过 z 轴，并且和平面 $2x+y-\sqrt{5}z-1=0$ 的夹角为 60° 的平面的方程。

37. 在空间直角坐标系中，求下列各对异面直线的距离和公垂线的方程：

(1) $\begin{cases} 3x+y-3=0, \\ y+z=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+z=0, \\ x-2y=0; \end{cases}$

(2) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$ 和 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$

38. 已知原点到平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\left(abc\neq 0\right)$ 的距离为 p，证明 $\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}.$

39. 求直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+12}{3}=\dfrac{z-4}{6}$ 和平面 $6x+15y-10z=0$ 的交角。

40. 证明三面角的三个二面角的平分面交于一直线。

41. 求经过平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+2=0$ 的交线且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面。

第三章 二次曲面

1.曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=x^2 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得旋转曲面就是 $x^2+y^2=1$ 吗？为什么？

2.求曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得旋转曲面的方程。

3.在空间直角坐标系中，求下列轨迹的方程：

⑴离两点 $\left(-3,0,0\right),\left(3,0,0\right)$ 的距离之和等于 10 的点的轨迹；

⑵离两点$(1,0,0),(4,0,0)$的距离之比等于 1：2 的点的轨迹。

4.在空间直角坐标系中，球面S的半径为 2，球心坐标为 $(0,1,-1)$，求S的平行于向量$u(1,1,1)$的柱切面的方程。

5.经过曲线$\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ z=0, \end{cases}$的圆柱面有几个？写出它们的方程。

6.设在空间直角坐标系中，直线l经过点$(3,-2,3)$，平行于x轴，写出以l为轴，并且经过点$M_1(2,-1,3)$，$M_2(-2,-2,0)$的圆锥面的方程。

7.在空间直角坐标系中，直线l_1：$\dfrac{x-a}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$与$l_2$：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$相交，求$a$，并求出$l_2$绕$l_1$旋转出的曲面的方程。

8.求单参数直线族$\dfrac{x-t^2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-t}{1}$（$t$任意）形成的曲面的方程。

9.证明在空间仿射坐标系中，方程为

$$f(s,t)=0$$

的图像是柱面，其中

$s=a_1x+b_1y+c_1z$，$t=a_2x+b_2y+c_2z$。

10.求下列锥面的方程：

⑴顶点为原点，一条准线为$\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=2; \end{cases}$

⑵顶点为$(0,1,2)$，一条准线为$\begin{cases} 2x^2+3y^2=4, \\ z=0; \end{cases}$

11.证明：如果曲面S关于一个空间直角坐标系的xy平面和xz平面都对称，则它关于x轴也对称。

12.在空间直角坐标系中，写出下列二次曲面的方程：

⑴椭圆抛物面，它的顶点就是原点，关于xz平面和yz平面都对称，并且经过

点$\left(1,2,5\right)$和$\left(\frac{1}{3},-1,1\right)$；

⑵马鞍面，它关于xz平面和yz平面都对称，并且经过点$\left(1,2,0\right),\left(2,0,2\right)$和原点；

⑶关于xy平面和yz平面都对称，其上有两条曲线：

$$\begin{cases} x^2-6y^2=0, \\ z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2+4y=0, \\ x=0. \end{cases}$$

13.称锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$为单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$和双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$的渐近锥面。证明：当单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$（双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$）上的点到原点的距离无限增大时，它到锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$的距离趋于 0。

14.已知$\mathrm{a}>\mathrm{b}>\mathrm{c}>0$讨论$k$的不同取值时，

方程：$\left(a-k\right)x^2+\left(b-k\right)y^2+\left(c-k\right)z^2=1$的图像。

15.已知$\mathrm{a}>\mathrm{b}>0$，讨论k的不同取值时方程$\left(a-k\right)x^2+\left(b-k\right)y^2=z^2$的图像。

16.求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$的过点$\left(2,-3,4\right)$的两条直母线的方程。

17.给定点，u,v,w是 3 个不共面的向量，记A_t为满足$\overrightarrow{AA_t}=tw$的点，l_t为经过A_t，平行于$v+tu$的直线。证明：由单参数直线族$\left\{l_t,t\in R\right\}$三角形成的图形是马鞍面。

18.l_2是两条异面的直线，它们都和平面不平行，证明所有与l_1和l_2都相交，并且平行于π的直线构成马鞍面。

19.3 条两两异面的直线，证明：所有和它们都共面的直线构成单叶双曲面或双叶双曲面，并指出何时构成单叶双曲面，何时构成双叶双曲面。

20.在一个平面右手直角坐标系 I 中，一个椭圆的长轴和短轴的方程分别为 $x+y=0$ 和 $x-y+1=0$，并且长半轴为 2，短半轴为 1，求它的方程。

21. 在一个平面右手直角坐标系 I 中，一条双曲线的两条对称轴的方程分别为 $x+2y-4=0$ 和 $2x-y+2=0$，并且它经过原点和 $\left(-\frac{9}{4},1\right)$，求它的方程。

22. 在一个平面右手直角坐标系 I 中，一条抛物线的顶点坐标为 $(4,2)$，焦点坐标为 $(2,0)$，求它的方程。

23.设 $f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$，证明：如果

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

是正交矩阵，则

$$f(c_{11},c_{12},c_{13})+f(c_{21},c_{22},c_{23})+f(c_{31},c_{32},c_{33})=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

24.在一个空间直角坐标系中，二次锥面

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$$

上有 3 条互相垂直的直母线的充分必要条件为 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$

25.在一个平面直角坐标系中，曲面有方程

$$y=4x^2-8x+5,$$

试作一个直角坐标系，使得该曲线的方程中只包含一个平方项和一个一次项。

26.在空间直角坐标系中，曲面方程为

(1) $(2x+y+z)^2-(x-y-z)^2=y-z;$

(2) $9x^2-25y^2+16z^2-24zx+80x-60z=0,$

请判断是什么曲面？

27.求准线为 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z=0, \end{cases}$ 母线平行于直线 $x=y=z$ 的柱面方程。

28.在空间直角坐标系中，如果

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2b_1x+2b_2y+c=0$$

在 xy 平面上的图像是椭圆（抛物线，双曲线），请说明

$$z=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2b_1x+2b_2y+c$$

的图像是什么曲面？

29.求柱面的方程，已知它经过曲线

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2(z-2)^2=25\\ x+y+z+2=0,\end{cases}$$

且它的母线与 x 轴平行，与直线 $x=y,z=c$ 平行。

30.柱面的准线方程为 $\begin{cases}x=y^2+z^2\\ x=2z\end{cases}$ ，母线垂直于椎线所在的平面，求这柱面的方程。

31.已知三条平行直线 $x=y=z,x+1=y=z-1,x-1=y+1=z-2$ ，求经过它们的圆柱面的方程。

32.给定方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1(a>b>c>0)$,试问当 k 取异于 a^2，b^2，c^2 各种数值时，它表示怎样的曲面？

33.由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心 O 任引三条相互垂直的射线，与曲面分别交于 P_1,P_2,P_3, 设 $OP_i=r_i,(i=1,2,3)$, 试证 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ 。

34.证明参数曲线 $\begin{cases}x=a_2t^2+a_1t+a_0,\\ y=b_2t^2+b_1t+b_0,\\ z=c_2t^2+c_1t+c_0,\end{cases}$ 是抛物线或直线。

35.已知一柱面的母线方向为 (l,m,n)，并且柱面外切与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，求该柱面方程。

36.设二次曲面 $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1\ (a>b>c>0)$,对于异于 a^2，b^2，c^2 的一个 λ 值，它表示一个二次曲面。试证：对空间中任一点 $(x_0,y_0,z_0),(x_0y_0z_0>0)$，恰有二次曲面族中的三张曲面通过，而且它们分别是单叶双曲面、双叶双曲面和椭球面。

37.判定下列曲线的形状，求出其中的椭圆或双曲面的中心：

(1) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z,\\ 3x-y+6z-14=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z,\\ x-2y+2=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1,\\ 9x-6y+2z-28=0.\end{cases}$

38.讨论下列曲面与平行于坐标平面的截口情况：

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ (2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

(3) $2x=\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$。

39. 试求通过点 $A\left(4,-\dfrac{8}{9},\dfrac{8}{3}\right)$ 到曲面 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 的切线的轨迹。

40.若椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 任意点的法线都通过它的中心，试问系数 a,b,c 应满足什么条件？

41.试证明中心二次曲面上同一直径的两个端点所作的切平面互相平行。反之，若同一中心二次曲面上两个切平面是平行的，则切点在一直径上。

42.若从椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心按单位矢量 $e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 所确定的方向到椭球面上的距离为 p。证明 $\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2}+\dfrac{\cos^2\beta}{b^2}+\dfrac{\cos^2\gamma}{c^2}$。

43.圆锥面 $x^2+y^2-z^2-tg^2\theta=0$ 与平面 $z=xtg\alpha+b$ 的截口（称为圆锥截线），当为 a 何值时，将是椭圆、双曲线或抛物线，并作出图形。

44.将直角三角板与斜边夹角为 60° 的直角边取为 z 轴，直角顶取为坐标原点。直角三角板绕 z 轴旋转，求其斜边所成的圆锥面的方程。

45.直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$ 绕 x 轴旋转，求所得曲面的方程。

46.写出 xOy 平面上一圆周 $\begin{cases}(x-R)^2+y^2=r^2\ (R>r)\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得圆环面的参数方程。

47.求抛物线 $y^2=2x,z=0$ 绕其准线旋转所得的曲面方程。

48.求旋转曲面的方程：

(1) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转；

(2) $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$ 绕 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$ 旋转；

49.已给单叶双曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$，求它的腰椭圆。

50.当数 m,n,a,b,c 满足什么条件时，平面 $z=mx+ny+p$ 与单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的交线为椭圆、双曲线或抛物线？

51.当 m 取何值时，平面 $x+mz-1=0$ 与双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的交线为椭圆、双曲线或抛物线？

52.试求椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2}+y^2=2z$ 上的圆点。

53.已知母线平行与 Oz 轴的柱面的准线

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2+3z^2+2xz+5yz-7=0, \\ z=3 \end{cases}$$

为求柱面的方程。

54.求曲面

$$\begin{cases} -9y^2+6xy-2xz+24x-9y+3z-63=0, \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$$

在 Oxy 平面上的投影曲线。

55.锥面的顶点在坐标原点，且准线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c\left(c\neq 0\right) \end{cases}$$

写出锥面的方程。

56.试求同时外切与两个半径相等球面 $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(c-z\right)^2=R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的圆柱面的方程。

57.已知单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$，求两个平面，使它们分别平行与 yOz 平面和 xOz 平面，而且与曲线的交线都是一对直线。

58.平面 $x-mz=0$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 相交，问 m 取何值时交现为椭圆？何时交线为双曲线？

59.求过 x 轴，且与单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>b)$ 的交线是圆的平面。

60.求证：和轴 Oz 平行的平面与椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的交线都是抛物线。

61.求证：和轴 Oz 平行的平面与双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的交线或者是抛物线，或者是直线。

62.试求双曲抛物面 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ 上平行与平面 $6x+4y+3z-17=0$ 的直母线。

63.试证明单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的直母线在坐标平面上的正投影直线切与曲面在这坐标平面上的主截线。

64.求直线族 $L_\lambda:\frac{x-\lambda^2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-\lambda}{0}$ 所构成的曲面。

65.求直线族 $L_\lambda:\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y-\lambda}{2}=\frac{z}{3}$ 所构成的曲面。

66.证明双曲抛物面上每两条同族母线不共面。

67.证明双曲抛物面上每两条异族母线共面。

68.证明经过双曲抛物面的一条母线的每一个平面也经过属于另一族的一条母线。

69.试求单叶双曲面上互相垂直的直母线的交点的轨迹。

70.试求与平面 $2x+3y-5=0$ 平行且与直线 $a_1:\begin{cases}y-2z+2=0\\x-3z-3=0,\end{cases}a_2:\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$ 共面的动直线产生的曲面方程。

71.已知直角坐标变换公式

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'-1\\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'+1\\ z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'+1\end{cases}$$

⑴求平面 $3x+y-4z-5=0$ 在新坐标系下的方程；

⑵求直线$\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}$在新坐标系下的方程。

72.求坐标轴平移变换公式，使球面方程

⑴$x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-15=0$

⑵$x^2+y^2+z^2-10x+6z-15=0$

化为$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$的形式。

73. 平移坐标系，使新原点为曲面中心，化简下列有心二次曲面：

⑴ $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0;$

⑵ $x^2+2y^2-z^2+2x-4y+2z+1=0.$

第四章 保距变换和仿射变换

1.如果 f,g 都是平面上的变换，使得是$g\circ f$ 可逆变换，证明 f 是单一的，g 是满的。

2.证明：如果 $f:X\to Y$ 是可逆映射，则它是一一对应，并且逆映射就是 f^{-1}。

3.平面上的两个变换 f,g，如果满足

$$f\circ g=g\circ f,$$

则称它们是可交换的。下面各对变换是否可交换？

⑴两个平移；

⑵中心相同的两个旋状；

⑶一个反射和一个平移，平移量平行于反射轴；

4. 设l_1,l_2是平面上的两条不同直线，η_1,η_2分别是以它们为轴的反射，问：$\eta_1\circ\eta_2$是什么变换？（就l_1和l_2平行和不平行两种情况讨论）。

5.设l是平面上的一条直线，$O\in l$，记是η关于l的反射，h是关于O的中心对称。

⑴ 说明$\eta \circ h, h \circ \eta$各是什么变换？

⑵ 写出包含h，η的最小的变换群。

5. 证明以直线l为轴的一个斜压缩可以分解为以l为轴的一个正压缩和以l为轴的一个错切的乘积。

   斜压缩　取定π上的一条直线l，一个非 0 向量u和一个正数k，作π的变换$\xi:\pi \to \pi$为：$\forall A \in \pi$，令$\xi(A)$是下列条件决定的点：

   ⑴ $\overrightarrow{A\xi(A)}$与u平行；

   ⑵ $\xi(A)$到l的距离 $d(\xi(A),l) = kd(A,l)$；

   ⑶ $\xi(A)$与A在l的同一侧。

   称变换ξ为π上的一个斜压缩，称l为压缩轴，称u代表的方向为压缩方向，称k为压缩系数（正压缩和错切都是斜压缩的特殊情况，它们压缩的方向分别垂直和平行于压缩轴）。

6. 如果A和B是两个不同的点，它们在仿射变换f作用下都不变，证明在直线AB上的每个点在f下都不变。

7. 设f是仿射变换，l是一条直线，A和B是线外两点，证明：A和B在l的同侧$\Leftrightarrow$ $f(A)$和$f(B)$在l的同侧。

8. 证明：任何仿射变换都可分解为一个相似变换和一个正压缩的乘积。

9. 证明：每个位似变换都可分解为两个正压缩的乘积。

10. 设Γ是一条抛物线，点$P \in \Gamma$，试证明存在仿射变换f，使得$f(\Gamma) = \Gamma$，但$f(P)$是顶点。

11. 设Γ是是一个椭圆，l和l'是一对共轭直径，试证明存在仿射变换f，使得$f(\Gamma) = \Gamma$，但$f(l)$和$f(l')$是两条对称轴。

12. 说明保持某一条直线上的每个点都不动的仿射变换或是以此直线为轴的斜压缩，或是一个这样的斜压缩和关于此直线的反射的乘积。

13. 写出下列仿射变换的乘积系数：斜压缩，滑反射，错切，相似。

14. 设f是一个斜压缩，建立仿射坐标系I，它的x轴就是压缩轴，y轴平行于压缩方向，写出f在I中的变换公式。

15. 证明：在右手直角坐标系中，第一相似变换的变换矩阵为

$k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，其中$k$是相似系数。

16. 求把直线$x=0$变为$3x-2y-3=0$，把$x-y=0$变为$x-1=0$，把$y=1$变为$4x-y-9=0$的仿射变换的变换公式。

17. 证明：如果仿射变换f只有一个不动点，则它的每一条不变直线都经过不动点。

18. 已知下列仿射变换在一个仿射坐标系中的变换公式，求它的不变直线：

⑴$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=4x+3y \end{cases}$

⑵$\begin{cases} x'=2x+4y-1 \\ y'=3x+3y-3 \end{cases}$

19. 已知仿射变换f的变换公式为

$$\begin{cases} x'=7x-y+1 \\ y'=4x+2y+4 \end{cases}$$

⑴ 求f的不变直线；

⑵作坐标系，使得两条对称轴都是不变直线，求在f此坐标系中的变换公式。

20. 试证$\varphi=x^2+y^2+z^2$对于坐标轴的旋转是不变式。

21. 证明两点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$在坐标变换下是不变量。

22. 设u_1,u_2是仿射变换f的两个特征向量，它们的特征值不相等。证明：

⑴ u_1,u_2不平行；

⑵ u_1+u_2不是特征向量。

23. 设f是平面上的一个第二类仿射变换，没有不动点，变积系数为 3。一个仿射变换系I的坐标向量e_1是f的特征向量，其特征值为 1。

⑴ 求f在中的变换公式I的一般形式；

⑵ 求 f 的不变直线在 I 中的方程。

24. 求下列曲面的渐近锥面：

⑴ $x^2+y^2+4z^2+2xy-4zx-4yz-4x-4y+8z=0$；

⑵ $3x^2+4y^2-8xy+4zx-8yz-4x-8z-4=0$。

25. 求下列各曲面的中心（有心曲面求出中心坐标，无心曲面指出没有中心或求出中心直线方程、中心平面方程）：

⑴ $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6zx+12x-36z=0;$

⑵ $4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12zx+8x-4y+12z-5=0$。

26. 设 $ABCD$ 是一个椭圆的外切平行四边形，证明直线 AC 和 BD 是这个椭圆的一对共轭直径。

27. 设一条双曲线和平行四边形 $ABCD$ 各边所在的直线都相切，证明直线 AC 和 BD 是此双曲线的一对共轭直径。

28. 证明：椭圆的每一对共轭直径都把椭圆分割成面积相等的 4 块。

29. 证明：以椭圆的每一对共轭半径为边的平行四边形的面积都等于 ab（a 和 b 分别是椭圆的长半轴和短半轴）。

30. 在椭圆的所有外切平行四边形中，当对角线在一对共轭直径上时，面积达到最大值 $2ab$。

31. 设 A,B 是抛物线上的两点，过 A,B 的抛物线的两条切线相交于 C 点。又设 D 是 AB 的中点。证明 CD 平行于抛物线的对称轴。

32. 设点 D,E,F 依次在 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 上。证明：存在 $\triangle ABC$ 的内切椭圆，使得其切点为 D,E,F 的充分必要条件是

$$(A,B,D)(B,C,E)(C,A,F)=1.$$

33. 设不共线点组 A,B,C 都是空间仿射变换 f 的不动点，证明 A,B,C 所决定的平面上的每一点都是 f 的不动点。

34. 已知保距变换 f 有不动直线 l。证明：

⑴ 如果 f 是第一类的，则 f 是一个旋转；

⑵ 如果 f 是第二类的，则存在一张过 l 的平面，它的每一点都是不动点。

35. 证明：从椭圆面外的一点向椭球面所作的所有切线的切点都在同一平面上。

* 第五章 平面坐标变换和二次曲线的分类

1.设 A,B,C,D 是空间不共面的 4 点，两个坐标系为

$$I\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right],\qquad I'\left[B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right]$$

求从 I 到 I' 的坐标变换公式和过渡矩阵。

2. I 和 I' 是空间中的两个仿射坐标系，已知 I' 的原点 O' 在 I 中的坐标为 $(1,5,2)$，坐标轴 x' 轴平行于向量 $u_1(0,1,1)$，y' 轴平行于向量 $u_2(1,0,1)$，又知道 I 的原点 O 在 I' 中的坐标为 $(-1,-1,2)$，求 I 到 I' 的过渡矩阵。

3.设 I 是平面右手直角坐标系，构成右手直角系 I'，使得它的 x' 轴在 I 中的方程为 $4x-3y+12=0$，y' 轴上有一点 A 在 I 中的坐标为 $(1,-3)$，并且 A 在中的 y' 坐标是正数。

⑴求 I 到 I' 的点的坐标变换公式。

⑵已知直线在 I 中方程为 $3x-2y+5=0$，求它在 I' 中的方程。

4.在平面上两个右手直角坐标系 I 和 I' 中，点 A 的坐标分别为 $(6,-5)$ 和 $(1,-3)$，B 的坐标分别为 $(1,-4)$ 和 $(0,2)$，求 I 到 I' 的点的坐标变换公式。

5.在一个右手直角坐标系 I 中，曲线的方程为 $2xy=a$，把它绕着原点旋转 45°，求所得的曲线的方程。

6.判断在右手直角坐标系中，有下列变换公式的保距变换是什么变换，并求出其特征（旋转中心，反射轴线，滑反射轴线和滑动量等）：

(1) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 3 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x' = \dfrac{12}{13}x + \dfrac{5}{13}y - 1 \\ y' = \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + 5 \end{cases}$

7.两直角坐标系$Oxyz$和$Ox'y'z'$有公共的坐标原点，且新坐标轴在原坐标系下的方向余弦是：$Ox':-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3};\quad Oy':\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3};\quad Oz':\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$求坐标变换公式。

8.设仿射变换f在一个仿射坐标系I中的变换公式为

$$\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = 3x - y - 1. \end{cases}$$

(1) 求曲面$x^2 - 2y + 3 = 0$的像的方程；

(2) 求曲面$x^2 + y^2 = 4$的原像的方程。

9.已知I和I'都是平面右手直角坐标系，I'的x'轴在I中的方程为$3x - 4y + 5 = 0$，I的原点在I'中的坐标为$(2,1)$。

(1) 求I到I'的点的坐标变换公式；

(2) 求在I中的方程为$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$的椭圆在$I'$中的方程。

10.将坐标轴旋转角度θ，求下列曲线在新坐标系中的方程，并画图：

(1) $17x^2 - 16xy + 17y^2 = 225, \theta = \dfrac{\pi}{4};$

(2) $\sqrt{3}xy - y^2 = 12, \theta = \dfrac{\pi}{6}.$

11.求适当的转轴，使下列曲线在新坐标系中的方程不包含$x'y'$项：

(1) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 5 = 0;$

（2） $x^2-xy+2y-4=0.$

12.平移坐标系，将原点移到$\left(x_0,y_0\right)$，求下列曲线在新坐标系中的方程：

（1） $y^2=2y+4x,\left(x_0,y_0\right)=\left(\frac{1}{4},1\right);$

（2） $x^2+4y^2-2x-1=0,\left(x_0,y_0\right)=\left(1,0\right).$

13.直接由方程的系数确定下列二次曲线的形状，并写出标准形：

（1） $7x^2-8xy+y^2+14x-8y+16=0;$

（2） $x^2+xy-2y^2-11x-y+28=0;$

（3） $32x^2+48xy+18y^2-57x-24y+6=0.$

14.方程$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$表示什么曲线？

15.下列曲线的中心：

（1） $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+11=0;$

（2） $4x^2+4xy+y^2-10x-5y+6=0.$

16. 求下列二次曲线的主轴：

（1） $x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6=0;$

（2） $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0.$

17.若$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+c=0$是椭圆或双曲线。证明主轴是

$a_{12}\left(x^2-y^2\right)-\left(a_{11}-a_{22}\right)xy=0.$

18.若$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$是一条抛物线，证明与它只有常数项不同的方程也表示一条抛物线，并且它们的主轴方向和开口方向相同。

19.分别决定$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$及$x^2=2py$的渐近方向。

20.证明对于抛物线$y^2=2px$的任意方向$\left(1,k\right)$的共轭直径平行与它的渐近方向。

21.已知椭圆的中心是$\left(2,1\right)$，两条共轭直径的各一端点是$\left(5,-1\right)\left(0,3\right)$，写出椭圆的方程。

25.证明：过四点$(\alpha,0),(\beta,0),(0,\gamma),(0,\delta)$的任一条二次曲线可表示成

$\dfrac{1}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)+\dfrac{1}{\gamma\delta}(y-\gamma)(y-\delta)-1+2hxy=0$，其中$h$为参数。

26.已知$\triangle ABC$，E是AB的中心，抛物线与CA,CB分别在A,B相切。证明EC与抛物线的主轴平行。

27. 给定方程 $(A_1x+B_1y+C_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2)^2=1$，其中 $A_1B_2-A_2B_1=1,A_1A_2+B_1B_2=0$。证明它是椭圆，并求标准形。

28. 已知$\triangle ABC$，E是AB的中心，D是CE上的一点，且$k=\dfrac{CD}{DE}$。

⑴ 求二次曲线，使它通过D点，且与CA,CB分别在A,B相切；

⑵ 根据k的值讨论二次曲线的类型。

第六章 射影几何学初步

1.设S^2是一个球面，P_1是由S^2的每一对对径点（即直径的两个端点）为元素的集合，把在S^2的每个大圆上的那些对径点构成P_1的子集称为P_1的线。说明具有这样线结构的集合P_1是一个射影平面。

2.设D^2是一个圆盘（圆周及其所围的部分），规定集合为：其元素P_2包括D^2的全体内点和圆周上的每一对对径点。P_2上的规定线结构为：全体对径点是一条线；把上D^2每个以D^2的直径为长轴的半椭圆上的元素也构成线。说明具有这样的线结构的集合P_2是一个射影平面。

3.利用射影坐标系证明一个平行四边形的两条对角线互相平分。

4.设l_1,l_2,l_3,l_4是共面但是两两不平行的4条直线，$(l_1,l_2;l_3,l_4)=k$试求下列交比：

$(l_4,l_3;l_2,l_1)$，$(l_4,l_2;l_3,l_1)$，$(l_2,l_3;l_4,l_1)$，$(l_4,l_1;l_2,l_3)$.

5.设 A,B,C,D,E 是普通平面上共线的 5 个不同点，证明：

$$(A,B;C,D,)(A,B;D,E)=(A,B;D,E)$$

6.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是空间中的 4 个共面，并且两两不共线的向量。证明：

$$(\alpha_1,\alpha_2;\alpha_3,\alpha_4)=\frac{\sin\angle(\alpha_1,\alpha_2)\sin\angle(\alpha_4,\alpha_2)}{\sin\angle(\alpha_3,\alpha_2)\sin\angle(\alpha_1,\alpha_4)}$$

7.证明：椭圆被它上面的 5 个点完全决定。

8.求保持三个坐标轴不动的一切仿射变换。

9.求保持 xOy 平面上每一点不动的一切仿射变换。

10. 求保持 z 轴上每一点不动的一切仿射变换。

11.证明经过相似变换，任意两个非零向量间的夹角不变。

12.用几何方法证明：对于两个平行平面反射之积是一个平移；对于两个相交平面反射之积是一个绕平面交线的旋转。

13.设 l_1,l_2,l_3 是普通平面上相交于点 P 的 3 条线，l_4 是它们的第四调和线。证明：

l_3 与 l_4 垂直 $\Leftrightarrow$ l_3 是 l_1,l_2 的共线。

14.用作图法画出普通平面上相交于一点 P 的 3 条不同直线的第四调和线。

15.用作图法画出普通平面上 3 条相互平行的不同直线的第四调和线。

16.平面 π 上有一个凸四边形 $ABCD$，在扩大平面 π_+ 上的射影坐标系 $[A,B,C,D]$ 中，试求

⑴ 四边形 $ABCD$ 的各边及对角线所在线的射影坐标；

⑵ 两条对角线交点的射影坐标；

⑶ AB 线与 CD 线的交点的射影坐标。

17.试说明：射影平面上在取定的射影坐标系中，用射影坐标计算共线 4 点的交比的方法也适用于共点 4 线交比的计算。

18.在一个射影平面上去取顶定的射影坐标系中，共线点组 l_1,l_2,l_3 的射影坐标依次为 $\langle 1,4,1\rangle,\langle 0,-1,t\rangle,\langle 2,3,-3\rangle$，求 t，并求线 l_t 的坐标，使得交比 $\langle l_1,l_2;l_3,l_4\rangle=4.$

19.在射影平面上有 4 条直线 l_1,l_2,l_3,l_4，在一个射影坐标系中，它们的射影坐标依次为：$\langle 3,-4,1\rangle,\langle 5,-1,-2\rangle,\langle 0,1,1\rangle,\langle -1,1,0\rangle,$

设 l_1,l_2 的交点为 A，l_3,l_4 的交点为 B，l 是 A,B 的连线。

⑴ 求 l 的射影坐标；

⑵ 计算 l_1,l_2,l 的第四调和线。

20.设$[A,B,C,D]$是射影平面上的一个射影坐标系。P点在此坐标系中的坐标为$\left\langle (3,-2,4)^T \right\rangle$，求交比$(PA,PB;PC,PD)$。

21.用射影坐标法证明帕普斯定理。

22.试写出德扎格定理的对偶命题。

23.在一个射影平面上给出两个射影坐标系J和J'：

$$J=[A,B,C,D],\quad J'=[C,A,D,B],$$

求J到J'的过渡矩阵。

24.在取定射影平面上给出一个射影坐标系$J=[A,B,C,D]$,求依次把点

$$\left\langle (1,0,1)^T \right\rangle,\left\langle (2,0,1)^T \right\rangle,\left\langle (0,1,1)^T \right\rangle,\left\langle (0,2,1)^T \right\rangle$$

变为A,B,C,D的射影变换在J中的变换矩阵。

25.在射影坐标系J中，求依次把线

$$\langle 1,0,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,0,1\rangle$$

变为 $\langle a_1,b_1,c_1\rangle$, $\langle a_2,b_2,c_2\rangle$, $\langle a_3,b_3,c_3\rangle$,

的射影变换在J中的变换矩阵的一般形式。

26.已知一个射影变换在射影坐标系J中的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

求它的不动点和不动线。

27.设$f:\pi_+ \to \pi_+$是扩大平面π_+的一个射影变换，在下列条件下，判断它是不是仿射—射影变换，并说明理由。

⑴ f把π上一个平行四边形变为平行四边形；

⑵ π上有三个不共线的点是f的不动点。

28.如果二次曲线经过射影标架的 4 个基本点，则它的方程为

$$2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$$

的形式，其中$a_{12}+a_{13}+a_{23}=0$。并且如果它是圆锥曲线，则a_{12},a_{13},a_{23}都不为 0.

29.求过 5 个点$\left\langle (1,1,0)^T \right\rangle,\left\langle (2,1,0)^T \right\rangle,\left\langle (1,-1,1)^T \right\rangle,\left\langle (0,1,-1)^T \right\rangle,\left\langle (0,0,1)^T \right\rangle$的二次曲线的方程。

30.求过 3 个点 $A\left\langle (2,1,0)^T \right\rangle$, $B\left\langle (0,2,1)^T \right\rangle$， $C\left\langle (0,0,1)^T \right\rangle$,并且在 A 和 B 的切线分别为 $\langle 1,-2,2\rangle$ 和 $\langle 0,1,-2\rangle$ 的二次曲线的方程。

31.设 Γ 是平面 π 上的一条中心型二次曲线，O 为中心，A,B 是上 Γ 的两个点，M 是它们的中点， N 是 Γ 在 A,B 处的两条切线的交点。证明 O,M,N 共线。

32.证明：如果一个椭圆的内接凸六边形有两对对边平行，则第三对对边也平行。

33.对于圆锥曲线的任意一个内接三角形，作每个顶点处的切线与对边的交点，证明这 3 个交点共线。

34.设 $ABCD$ 是圆锥曲线的一个内接四边形，记 M 是 A 和 C 处切线的交点，N 是 B 和 D 处切线的交点，P 是边 AB 和 CD 的交点，Q 是边 AD 和 BC 的交点，证明：M,N,P,Q 共线。