八、空间的等距变换和仿射变换

盛为民

空间的等距变换

空间等距变换的定义 空间到自身的一个变换，如果保持任意两点间的距离在映射后不变，则称这个变换为空间的一个等距变换。如果空间的一个等距变换ϕ至少有一个不动点，即至少存在一点O使得$\phi(O) = O$, 则这个等距变换称为一个正交变换。

类似于平面等距变换，空间等距变换有如下性质:
性质1 空间等距变换将一条直线映到一条直线上。
性质2 空间等距变换将两平行直线映到两条平行直线。
由此可以诱导出向量的变换

$$\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

空间的等距变换

性质3 空间的等距变换保持向量内积不变。
性质4 空间的等距变换是一个线性变换。
在直角坐标系$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$中，设$\phi$是一个等距变换，$\phi(\overrightarrow{e_1}),\phi(\overrightarrow{e_2}),\phi(\overrightarrow{e_3})$是3个互相垂直的单位向量。设

$$\begin{aligned}\phi(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,\\ \phi(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,\\ \phi(e_3) &= a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.\end{aligned}$$

即

$$(\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)) = (e_1,e_2,e_3)A$$

空间的等距变换

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

是一个正交矩阵。记

$$\overrightarrow{O\phi(O)} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.$$

对于空间内任一点$M(x, y, z)$, 点$\phi(M)$在直角坐标系$\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$中的坐标是$(x^*, y^*, z^*)$.

空间的等距变换

类似于平面情形，容易得到坐标变换公式

$$\begin{aligned} x^* &= b_1 + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y^* &= b_2 + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z^* &= b_3 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

利用矩阵表示，
设$X = (x, y, z)^T, X^* = (x^*, y^*, z^*)^T, \alpha = (b^1, b_2, b_3)^T$，则

$$X^* = \alpha + AX.$$

空间的正交变换

设ϕ为空间的一个正交变换，O为一个不动点。取点O为坐标系的原点。利用等距变换的坐标变换公式，我们有相应的正交变换下的坐标变换公式:

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y^* &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z^* &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

或

$$X^* = AX.$$

相应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

空间的正交变换

由于上述方程是关于λ的实系数3次方程，至少有一个实根λ_0，因此有不全为零的一组实数解(x, y, z)满足

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z = \lambda_0 x, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = \lambda_0 y, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = \lambda_0 z. \end{cases} \tag{1}$$

设点M的坐标为(x, y, z), 则点$\phi(M)$的坐标是$(\lambda_0 x, \lambda_0 y, \lambda_0 z)$. 由于$\phi$是一个等距变换，则

$$d(O, M) = d(\phi(O), \phi(M)) = d(O, \phi(M)),$$

因而有

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\lambda_0)^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

从而

$$\lambda_0^2 = 1,\ \ \lambda_0 = \pm 1.$$

空间的正交变换

记通过点O和M的连线为L，由(1)可知，对于任意$\rho \in R$，有

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}(\rho x)+a_{21}(\rho y)+a_{31}(\rho z)=\lambda_0(\rho x), \\ a_{12}(\rho x)+a_{22}(\rho y)+a_{32}(\rho z)=\lambda_0(\rho y), \\ a_{13}(\rho x)+a_{23}(\rho y)+a_{33}(\rho z)=\lambda_0(\rho z). \end{array}\right. \tag{2}$$

这表明：当$\lambda_0=1$时，直线L上任一点在等距变换ϕ下都是不动点；当$\lambda_0=-1$时，点$M^*(\rho x, \rho y, \rho z)$被映为$-M^*(-\rho x, -\rho y, -\rho z)$。点$-M^*$仍在直线$L$上。不论$\lambda_0=1$还是$\lambda_0=-1$，都有$\phi(L)=L$. 这条直线$L$称为空间正交变换下的不动直线。

空间的正交变换

以上证明了

定理 空间的正交变换下一定存在一条不动直线。

现在取这条不动直线L作为新的z轴，建立新的直角坐标系$Oxyz$。设在新坐标系下，正交坐标变换ϕ公式仍由

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y^* &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z^* &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

表示。由于ϕ将点$(0,0,z)$映为$(0,0,\pm z)$，利用坐标变换公式，可得

$$a_{31} = 0, a_{32} = 0, a_{33} = \lambda_0 = \pm 1.$$

由于

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1,$$

有

$$a_{13} = a_{23} = 0.$$

空间的正交变换

这时坐标变换化简为

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{21}y, \\ y^* &= a_{12}x + a_{22}y, \\ z^* &= \lambda_0 z, \lambda_0 = \pm 1. \end{aligned}$$

再利用

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned}$$

空间的正交变换

利用平面等距变换的结论可知

$$a_{11} = \cos\theta, a_{21} = \sin\theta, a_{12} = -\sin\theta, a_{22} = \cos\theta. \tag{3}$$

或者

$$a_{11} = \cos\theta, a_{21} = \sin\theta, a_{12} = \sin\theta, a_{22} = \cos\theta. \tag{4}$$

因而正交变换公式，可表示为

$$\begin{cases} x^* = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y^* = -x\sin\theta + y\cos\theta, \\ z^* = \lambda_0 z, \lambda_0 = \pm 1; \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x^* = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y^* = x\sin\theta - y\cos\theta, \\ z^* = \lambda_0 z, \lambda_0 = \pm 1. \end{cases}$$

空间的仿射变换

空间的仿射变换的定义 空间到自身的一个到上的变换，如果将任一平面到上地映为一张平面，则称这个变换为空间的一个仿射变换。

完全类似于平面仿射变换的情形，空间仿射变换有如下性质:

性质1 空间仿射变换将一条直线到上地映到另一条直线上。

性质2 空间仿射变换将两条平行直线映成两条平行直线。

由此可知，空间仿射变换诱导了一个向量的变换，且有

性质3 空间仿射变换是一个线性变换。

性质4 空间仿射变换保持共线3点的分比不变。

性质5 空间仿射变换保持空间区域的体积比。

空间的仿射变换

取空间直角坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, 设$\phi$是空间的仿射变换，记

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{O\phi(O)} &= b_1 \overrightarrow{e}_1 + b_2 \overrightarrow{e}_2 + b_3 \overrightarrow{e}_3, \\
\phi(e_1) &= a_{11} \overrightarrow{e}_1 + a_{12} \overrightarrow{e}_2 + a_{13} \overrightarrow{e}_3, \\
\phi(e_2) &= a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \overrightarrow{e}_2 + a_{23} \overrightarrow{e}_3, \\
\phi(e_3) &= a_{31} \overrightarrow{e}_1 + a_{32} \overrightarrow{e}_2 + a_{33} \overrightarrow{e}_3.
\end{aligned}
$$

由于$\phi(\vec{e_1}), \phi(\vec{e_2}), \phi(\vec{e_3})$不在同一平面上，则有

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

空间的仿射变换

在直角坐标系$\{O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$内，空间任一点$M(x,y,z)$，经过空间仿射变换后映为点$\phi(M)$. 点$\phi(M)$在直角坐标系$\{O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$内的坐标是$(x^*,y^*,z^*)$. 利用

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\phi(M)} &= \overrightarrow{O\phi(O)} + \overrightarrow{\phi(O)\phi(M)}\\ &= \ldots\ldots\\ &= \overrightarrow{O\phi(O)} + x\phi\left(\vec{e}_1\right) + y\phi\left(\vec{e}_2\right) + z\phi\left(\vec{e}_3\right),\end{aligned}$$

空间的仿射变换

可以导出直角坐标系下空间仿射变换的坐标变换公式

$$\begin{aligned} x^* &= b_1 + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y^* &= b_2 + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z^* &= b_3 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

若令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

则上式可以写成矩阵形式:

$$X^* = AX + \alpha, \phi(X) = X^*.$$

空间的仿射变换

对于上述矩阵A，我们引入一个映射T，在直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$内，将空间任意一点$M(x,y,z)$映成点$T(M)(x',y',z')$，即

$$X' = TX = AX.$$

设S是一个平移，满足

$$S(X) = X + \alpha.$$

于是

$$S(T(X)) = S(A(X)) = A(X) + \alpha = \phi(X).$$

因此

$$\phi = ST.$$

映射T将原点映为原点。

空间的仿射变换

令

$$B = A^T A,$$

则

$$B^T = (A^T A)^T = B.$$

这表明B是一个对称矩阵。$|B| = |A|^2 > 0$. 记

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

在二次曲面分类一节中我们已经证明了，对应矩阵B的特征方程有三个实的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 对应每个特征根，有相应的互相正交的单位主方向$\overrightarrow{e_i^*} = (x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, 3)$,

空间的仿射变换

满足

$$\begin{cases} b_{11}x_i + b_{21}y_i + b_{31}z_i = \lambda_i x_i, \\ b_{12}x_i + b_{22}y_i + b_{32}z_i = \lambda_i y_i, \quad (i = 1, 2, 3) \\ b_{13}x_i + b_{23}y_i + b_{33}z_i = \lambda_i z_i. \end{cases}$$

记

$$T(\overrightarrow{e_i}^*) = \overrightarrow{\widetilde{e_i}}, i = 1, 2, 3.$$

$$\overrightarrow{\widetilde{e_i}} = (\widetilde{x_i}, \widetilde{y_i}, \widetilde{z_i}), i = 1, 2, 3.$$

空间的仿射变换

我们可以得到

$$\widetilde{e}_i \cdot \widetilde{e}_j = (\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i, \widetilde{z}_i) \begin{pmatrix} \widetilde{x}_j \\ \widetilde{y}_j \\ \widetilde{z}_j \end{pmatrix} = (x_i, y_i, z_i)\, A^T A \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

$$= (x_i, y_i, z_i)\, B \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = (x_i, y_i, z_i)\, \lambda_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_j e_i^* . e_j^* = \lambda_j \delta_{ij}.$$

所以$\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3$是两两互相正交的向量，而且

$$\widetilde{e}_j \cdot \widetilde{e}_j = \lambda_j, j = 1, 2, 3.$$

空间的仿射变换

由于$\lambda_j > 0$，令

$$g_j = \frac{\widetilde{e_j}}{\sqrt{\lambda_j}}, j = 1, 2, 3.$$

则g_1, g_2, g_3是3个互相正交的单位向量。
记C是将原点O映为O的线性变换，满足$C(e_j^*) = g_j, j = 1, 2, 3$，因而

$$C(xe_1^* + ye_2^* + ze_3^*) = xg_1 + yg_2 + zg_3.$$

由此可知，C是一个将直角坐标系$\{O, \overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}\}$内的点$(x, y, z)$映成直角坐标系$\{O, \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}\}$内的点$(x, y, z)$，所以$C$是一个等距变换。由于保持原点，所以是一个正交变换。

空间的仿射变换

令D是一个保持原点O不动的线性变换，且满足$D(\overrightarrow{g_i}) = \overrightarrow{\tilde{e_i}}, i = 1, 2, 3$, 则$D(O) = O$, 且

$$D(xg_1 + yg_2 + zg_3) = \cdots = x\tilde{e_1} + y\tilde{e_2} + z\tilde{e_3}.$$

D称为保持原点不动的分别沿3个互相垂直方向的伸缩变换之积。利用上述，可知

$$DC = T.$$

因此有

$$\phi = SDC.$$

空间的仿射变换

到此，我们证明了

定理 空间仿射变换ϕ可以写成$\phi = SDC$，这里C是保持直角坐标系原点不变的等距变换（即一个正交变换），D是一个保持原点不动，分别沿3个互相垂直方向的伸缩变换之积，S是一个平移。

空间的仿射变换

例1 已给一个非恒等变换的正交变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

求在这个变换下，每点都保持不变的直线的方向向量。这个变换可以由绕一个不动直线旋转α角来实现，求出这个角α.

空间的仿射变换

证明：第一步：显然原点是不动点，不动直线过原点。
第二步：在不动直线上另外取一点$(x, y, z) \neq O$, 则有

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x + a_{12} y + a_{13} z = 0, \\ a_{21} x + (a_{22} - \lambda)\, y + a_{23} z = 0, \\ a_{31} x + a_{32} y + (a_{33} - \lambda)\, z = 0. \end{cases}$$

其中$\lambda \pm 1$.

空间的仿射变换

第三步：分两种情况讨论:

(1) $\lambda = 1$, 由于a_{11}, a_{22}, a_{33}不全为1（否则为恒等变换），不妨设$a_{11} \neq 1$, 取不动直线的方向向量为

$$\vec{n} = (a_{11} - 1, a_{12}, a_{13}) \times (a_{21}, a_{22} - 1, a_{23})$$

(2) $\lambda = -1$, 由于a_{11}, a_{22}, a_{33}不全为-1, 同样可取

$$\vec{n} = (a_{11} + 1, a_{12}, a_{13}) \times (a_{21}, a_{22} + 1, a_{23})$$

对于第二小题，略。

空间的仿射变换

例2 求空间的一个仿射变换，将平面xy上的点映为平面xy上的点，将平面yz上的点映为平面x=1上的点。

解 设所求的仿射变换为

$$X' = AX + B,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

空间的仿射变换

平面xy上的点$(x, y, 0)$映为平面xy上的点$(x^*, y^*, 0)$，代入坐标变换表达式，得

$$\begin{cases} x^* = b_1 + a_{11}x + a_{12}y, \\ y^* = b_2 + a_{21}x + a_{22}y, \\ 0 = b_3 + a_{31}x + a_{32}y. \end{cases}$$

由第三个方程可得：方程对于所有的x, y都成立，所以有

$$b_3 = 0, a_{31} = 0, a_{32} = 0$$

空间的仿射变换

利用变换将yz平面上的点$(0,y,z)$映为平面$x=1$上的点$(1,y^*,z^*)$可知

$$\left\{\begin{array}{r}1=b_1+a_{12}y+a_{13}z,\\ y^*=b_2+a_{22}y+a_{23}z,\\ z^*=a_{33}z.\end{array}\right.$$

利用第一个方程得

$$a_{12}=0, a_{13}=0, b_1=1.$$

从而仿射变换为:

$$\left\{\begin{array}{l}x^*=1+a_{11}x,\\ y^*=b_2+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ z^*=a_{33}z.\end{array}\right.$$

其中$a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0$.

空间的仿射变换

几个空间仿射坐标系到仿射坐标系之间坐标变换的例子，请注意与仿射坐标变换相区别：

例1 已知仿射坐标系I'的3个坐标平面在仿射坐标系I中的方程为

$$
\begin{aligned}
y'O'z' &: 3x+2y-2z+1=0,\\
x'O'z' &: 2x+y-z-2=0,\\
x'O'y' &: x-2y+z+2=0.
\end{aligned}
$$

并且I的原点O在I'中的坐标为$(1,-4,-2)$，求坐标变换公式。

解 设所求的坐标变换公式为

$$X' = AX + B,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

空间的仿射变换

根据题意，$y'O'z'$平面，即$x'=0$在I中的方程为

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+1=0.$$

这个方程与已知方程$3x+2y-2z+1=0$ 相对照，可知$a_{11}=3, a_{12}=2, a_{13}=-2$; 类似地，可求出$a_{21}=4, a_{22}=2, a_{23}=-2, a_{31}=-1, a_{32}=2, a_{33}=-1$. 从而得坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=3x+2y-2z+1, \\ y'=4x+2y-2z-4, \\ z'=-x+2y-z-2. \end{cases}$$

空间的仿射变换

例2 设(a_1, b_1, c_1)和(a_2, b_2, c_2)不成比例，证明在任意仿射坐标系I中，形如

$$f\left(a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z\right) = 0$$

的方程的图形S是柱面。

证明 可以找一个新的坐标系I′，使得图形S在新坐标系下的方程为$f(x', y') = 0$, 这样就可看出S是柱面。

由条件(a_1, b_1, c_1)和(a_2, b_2, c_2)不成比例可知，可以找到一组数(a_3, b_3, c_3)，满足

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

空间的仿射变换

是可逆矩阵。设

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

作仿射坐标系$I'[O; e_1', e_2', e_3']$，使得e_1', e_2', e_3'在I中的坐标依次为C^{-1}中各列的列向量。则从I到I'的坐标变换公式为

$$X = C^{-1}X', X' = CX.$$

于是图形S在I和I'下的方程分别为$f\,(a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z) = 0$和$f(x', y') = 0$，从而是柱面。