七、平面上的等距变换和仿射变换

盛为民

1-1映射和变换

1-1映射和1-1变换的定义 设ϕ为从一个集合M到另一个集合N的一个映射，如果ϕ将M中任意两个不同的元素映为N内不同的元素，则ϕ称为从集合M到N的一个1-1映射。如果$M = N$，则称ϕ为集合M上的一个变换。这一节和下一节，我们将分别考虑平面和空间的变换。

平面上的等距变换的定义

平面上的等距变换的定义 平面π上的一个变换ϕ, 如果保持任意两点的距离在映射后不变，则称变换ϕ为平面π上的等距变换。记d为平面π两点间的距离函数，则

$$d(x,y)=d(\phi(x),\phi(y)),$$

这里x,y是平面π上任意两个点。

例1 写出平面上点关于过原点的直线L的反射公式，并证明这是一个等距变换。
解 如图，设$\overrightarrow{u}$是垂直于直线L的单位向量，记

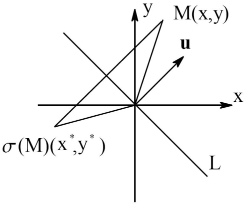
$$\overrightarrow{u}=(\cos\theta,\sin\theta).$$

平面上的等距变换的定义

在平面上任取一点$M(x,y)$, 记平面上关于直线L的反射为σ，并记

$$\sigma(M)=(x^*,y^*).$$

显然有



$$\overrightarrow{O\sigma(M)}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{M\sigma(M)}.$$

利用$\overrightarrow{u}$是单位向量，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M\sigma(M)}&=2\pi_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{OM}(-\overrightarrow{u})\\&=2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{u})(-\overrightarrow{u})\\&=-2(x\cos\theta+y\sin\theta)(\cos\theta,\sin\theta).\end{aligned}$$

平面上的等距变换的定义

由此得

$$x^* = x - 2(x\cos\theta + y\sin\theta)\cos\theta = -x\cos 2\theta - y\sin 2\theta,$$
$$y^* = y - 2(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\theta = -x\sin 2\theta + y\cos 2\theta.$$

这就是所要求的反射公式。
设平面上另有一点$M'(x', y')$, 经过反射后得到$\sigma(M')(x'^*, y'^*)$. 显然有

$$(d(M, M'))^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2.$$
$$(d(\sigma(M), \sigma(M')))^2 = (x'^* - x^*)^2 + (y'^* - y^*)^2.$$

利用反射公式，容易计算得

$$x'^* - x^* = (x - x')\cos 2\theta + (y - y')\sin 2\theta.$$
$$y'^* - y^* = (x - x')\sin 2\theta - (y - y')\cos 2\theta.$$

平面上的等距变换的定义

从而

$$(d(\sigma(M), \sigma(M')))^2 = \cdots = (d(M, M'))^2.$$

σ是一个等距变换。证毕

满射的定义 一个集合M到另一个集合N内的映射ϕ，如果对于N内任一元素y，必有M内一个元素x，使得$\phi(x) = y$，则称映射ϕ为到上的，或称为满的。

注意：本节中所述“变换”的定义，没有满射这一条件，因而比一般书上的定义要“弱”。

平面上的等距变换的性质

易知平面上等距变换有如下性质:

性质1 平面上等距变换将一条直线到上地映到一条直线上。

性质2 平面上等距变换将两条平行直线映为平行直线。
由此可知平面上的平行四边形在等距变换下变为平行四边形。因而导出向量的映射

$$\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

性质3 平面上等距变换保持向量内积不变。
等距变换实际上保证了向量的长度和夹角都保持不变。

平面上的等距变换的性质

定义 如果平面上一个变换ϕ满足

$$\phi(\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b})=\lambda\phi(\overrightarrow{a})+\mu\phi(\overrightarrow{b}),$$

这里λ,μ是两个任意实数，$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$是平面上任意两个向量，则$\phi$称为平面上的一个线性变换。

性质4 平面上等距变换是一个线性变换。

对于平面上的一个等距变换ϕ, 取平面上一个直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$, 这两个彼此正交的单位向量，在$\phi$下的像$\phi(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1^*},\phi(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_2^*}$也是彼此正交的单位向量, 因此可以表示为

$$\overrightarrow{e_1^*}=a_{11}\overrightarrow{e_1}+a_{12}\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2^*}=a_{21}\overrightarrow{e_1}+a_{22}\overrightarrow{e_2}.$$

其中$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$全是实数。

平面上的等距变换的性质

利用$\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}$彼此正交且是单位向量的性质，有

$$\overrightarrow{e_1^*} \cdot \overrightarrow{e_1^*} = 1, \overrightarrow{e_1^*} \cdot \overrightarrow{e_2^*} = 0, \overrightarrow{e_2^*} \cdot \overrightarrow{e_2^*} = 1,$$

可以得到

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1.$$

令

$$a_{11} = \cos\theta, a_{12} = \sin\theta, \theta \in [0, 2\pi)$$

我们可以解得

$$\begin{cases} a_{21} = \sin\theta, \\ a_{22} = -\cos\theta, \end{cases} \text{or} \begin{cases} a_{21} = -\sin\theta, \\ a_{22} = \cos\theta. \end{cases}$$

平面上的等距变换的性质

从而有

$$\overrightarrow{e_1^*} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_2^*} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_1} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}.$$

或

$$\overrightarrow{e_1^*} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_2^*} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}.$$

设

$$\phi(O) = O^*,\ \overrightarrow{OO^*} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2}.$$

对于平面内任一点$M(x,y)$, 我们希望找出在等距变换ϕ下的像$\phi(M)$在直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$中的坐标$(x^*,y^*)$与$(x,y)$的关系式。

平面上的等距变换的性质

利用

$$\overrightarrow{O\phi(M)} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*\phi(M)} = \cdots = \overrightarrow{OO^*} + \phi(\overrightarrow{OM}),$$

我们可得

$$\overrightarrow{O\phi(M)} = \overrightarrow{OO^*} + x\overrightarrow{e_1^*} + y\overrightarrow{e_2^*},$$

从而有

$$\begin{cases} x^* = b_1 + x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y^* = b_2 + x\sin\theta - y\cos\theta; \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} x^* = b_1 + x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y^* = b_2 - x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

这就是我们要的公式。

平面上的仿射变换

平面上仿射变换的定义 平面π到π的到上的一个变换，如果将任意一条直线到上地映到一条直线上，则这个变换称为平面上的一个仿射变换。

例2 平面上的等距变换是一个仿射变换。（等距变换性质1）
例3 已知k是一个非零实数。平面π到π的到上的映射ϕ由下式给定（取直角坐标系Oxy）

$$\phi(x,y)=(x,ky),\ \forall(x,y)\in\pi.$$

对于平面内任一直线$L: Ax+By+D=0$, 记$x^*=x, y^*=ky$, 将直线L方程两边同乘k，得方程：$Akx^*+By^*+kD=0$. 这仍然是一条直线的方程，记为L^*. 对于直线L^*上任意一点(x^*,y^*)，在直线L上有一点$(x^*,y^*/k)$, 使得$\phi(x^*,y^*/k)=(x^*,y^*)$。因而变换$\phi$是一个仿射变换。

平面上的仿射变换

例4 $k \neq 0, \phi : \pi \to \pi, \phi(x, y) = (kx, ky)$ 是仿射变换。
例5 $k \neq 0, \phi : \pi \to \pi, \phi(x, y) = (x + ky, y)$ 是仿射变换。

由于仿射变换是$1-1$的，将直线映为直线，因此将平行线映为平行线，将平行四边形映为平行四边形，从而诱导了一个向量的变换

$$\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

定理1 平面上的仿射变换是平面上的线性变换。
证明 第一步

$$\phi(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \phi(\overrightarrow{a}) + \phi(\overrightarrow{b}).$$

第二步 证明对于任意$\lambda \in R$和任意向量$\overrightarrow{a}$, 有

$$\phi(\lambda \overrightarrow{a}) = \lambda \phi(\overrightarrow{a}).$$

平面上的仿射变换

为了证明第二步，需要考虑若$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$，等式显然成立，所以只需考虑$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$的时候等式成立。
(1)利用保持平行性证明：$\phi(\lambda\overrightarrow{a})=\mu\phi(\overrightarrow{a})$. 再证明$\mu$与向量$\overrightarrow{a}$无关，只与$\lambda$有关，由此可令

$$\phi(\lambda\overrightarrow{a})=f(\lambda)\phi(\overrightarrow{a}).$$

(2)证明

$$\begin{aligned} f(\lambda+\mu)&=f(\lambda)+f(\mu),\\ f(\lambda\mu)&=f(\lambda)f(\mu),\\ f(\lambda)&\neq 0,\ \text{for } \lambda\neq 0. \end{aligned}$$

平面上的仿射变换

(3)证明
$$f(\lambda)=\lambda.$$
这里需要这样几步:
1)$f(0)=0$;
2)$f(1)=1$;
3)$f(m)=m$ for m 是任意正整数;
4)$f(m)=m$ for m是任意整数;
5)$f(p)=p$ for $p=m/n$是任意有理数;
6)$f(\lambda)=\lambda$ for λ是任意无理数。
定理证毕

直线上3点的分比

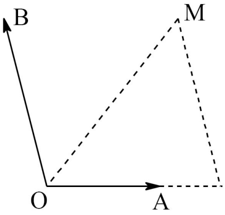
直线上3点的分比的定义 在一条直线L上任取3个不同的点p,q,r，这3点的分比$(p,q,r)=\frac{\overline{pr}}{\overline{pq}}$，等式右边是两个有向线段的比值。如果$q,r$在点$p$的同一侧，这个比值为正；如果$q,r$两点分别在$p$点的两侧，这个比值为负。

性质5 平面上的仿射变换保持共线的3点的分比不变。
性质6 平面上的仿射变换保持平面图形的面积比。

平面仿射坐标系

如图所示，在平面上取两个不共线的向量$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$，设$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{e_2}$. 对于这平面上任一点$M$，存在两个实数$x, y$，使得

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$



$\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$构成一个平面仿射标架（平面仿射坐标系），$(x, y)$称为点$M$在平面仿射坐标系$\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$下的坐标。

平面仿射坐标系与直角坐标系的区别在于向量$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$不一定是互相垂直的单位向量。

平面仿射坐标系

平面仿射坐标系与直角坐标系的区别与联系，可从下面的例子得到说明。

例6 在平面仿射坐标系$\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$内，有两点$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 求直线$AB$的方程，并求线段$AB$的长度$d$.

解 容易求得直线AB的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

这与平面直角坐标系中的直线方程完全一样。

由于

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - y_1)\vec{e_2}.$$

所以

$$d^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

平面仿射坐标系

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2g_{11}+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)g_{12}+(y_2-y_1)^2g_{22}}$$

其中

$$g_{11}=\overrightarrow{e}_1\cdot\overrightarrow{e}_1, g_{12}=\overrightarrow{e}_1\cdot\overrightarrow{e}_2, g_{22}=\overrightarrow{e}_2\cdot\overrightarrow{e}_2$$

这个距离公式显然与直角坐标系中的距离公式不同。但当$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是两个正交单位向量时，$g_{11}=g_{22}=1, g_{12}=0$，上述公式与直角坐标系中的完全一样。

平面上仿射变换的坐标表示

平面仿射坐标系$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$内，任取一点$M(x,y)$, ϕ是这平面上的一个仿射变换。我们希望写出点$\phi(M)$在$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$中的坐标。记

$$\phi\left(\overrightarrow{e}_1\right)=a_{11}\overrightarrow{e}_1+a_{12}\overrightarrow{e}_2,$$
$$\phi\left(\overrightarrow{e}_2\right)=a_{21}\overrightarrow{e}_1+a_{22}\overrightarrow{e}_2,$$

这里$a_{ij}, i=1,2; j=1,2$都是实数。
(1) 首先需要说明$\phi(\overrightarrow{e_1}),\phi(\overrightarrow{e_2})$不是共线向量。由此可导出

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0.$$

平面上仿射变换的坐标表示

(2) 其次利用

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\phi(M)} &= \overrightarrow{O\phi(O)} + \overrightarrow{\phi(O)\phi(M)} \\ &= \overrightarrow{O\phi(O)} + \phi\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ &= \overrightarrow{O\phi(O)} + \phi\left(x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2\right) \\ &= \overrightarrow{O\phi(O)} + x\phi\left(\overrightarrow{e}_1\right) + y\phi\left(\overrightarrow{e}_2\right)\end{aligned}$$

记

$$\overrightarrow{O\phi(O)} = b_1\overrightarrow{e}_1 + b_2\overrightarrow{e}_2$$

并设$\phi(M)$在$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$中的坐标为$(x^*,y^*)$.

平面上仿射变换的坐标表示

容易写出仿射变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x^* = b_1 + a_{11}x + a_{21}y, \\ y^* = b_2 + a_{12}x + a_{22}y. \end{cases}$$

平面上仿射变换的坐标表示

例题 求平面内曲线$\frac{x^2}{4}+y^2=1$关于直线$y=3x$反射后所得新曲线的方程。

解 在原曲线上任取一点(x^*,y^*)，它关于直线$y=3x$反射后的反射点为(x,y). 这两点连线与直线$y=3x$垂直，因此斜率为-1/3. 这两点连线的中点$(\frac{x^*+x}{2},\frac{y^*+y}{2})$在直线$y=3x$上，所以有

$$\begin{cases} y^*-y=-\frac{1}{3}\left(x^*-x\right), \\ \frac{y^*+y}{2}=3\left(\frac{x^*+x}{2}\right) \end{cases}$$

平面上仿射变换的坐标表示

由此解得

$$\begin{cases} x^* = \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}x, \\ y^* = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y. \end{cases}$$

代入原方程，得

$$\frac{13}{25}x^2 + \frac{18}{25}xy + \frac{73}{100}y^2 = 1.$$

这就是反射后曲线的方程。

平面上仿射变换的坐标表示

例题 在仿射坐标系I中，仿射变换f把直线$x+y-1=0$变为$2x+y-2=0$, 把直线$x+2y=0$变为$x+y+1=0$，把点$(1,1)$变为$(2,3)$，求f在I中的变换公式。

解 (方法一)待定系数法：假设所求变换公式为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2. \end{cases}$$

由于直线$2x+y-2=0$的原像为$x+y-1=0$, 从而直线

$$2(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + (a_{21}x + a_{22}y + b_2) - 2 = 0$$

就是直线$x+y-1=0$，于是

$$(2a_{11} + a_{21}) : (2a_{12} + a_{22}) : (2b_1 + b_2 - 2) = 1 : 1 : (-1). \quad (1)$$

平面上仿射变换的坐标表示

类似地，f把直线$x+2y=0$变为$x+y+1=0$可得

$$(a_{11}+a_{21}):(a_{12}+a_{22}):(b_1+b_2+1)=1:2:0. \tag{2}$$

再由f把点$(1,1)$变为$(2,3)$，得到

$$a_{11}+a_{12}+b_1=2, \tag{3}$$
$$a_{21}+a_{22}+b_2=3. \tag{4}$$

由上述(1), (2), (3), (4)可解出

$$a_{11}=3, a_{12}=1, a_{21}=-1, a_{22}=3, b_1=-2, b_2=1,$$

于是所要求的变换公式为

$$\begin{cases} x'=3x+y-2, \\ y'=-x+3y+1. \end{cases}$$

平面上仿射变换的坐标表示

这个方法的缺点是计算量大。
（解法二）把点(x, y)经过变换得到的像的坐标x', y'看成是x, y的函数。直线$2x + y - 2 = 0$的原像是$x + y - 1 = 0$，从而$2x' + y' - 2 = 0$和$x + y - 1 = 0$是同一条直线的方程，因此存在数s，

$$2x' + y' - 2 = s(x + y - 1).$$

再由f把点$(1, 1)$变为$(2, 3)$，用$x = 1, y = 1, x' = 2, y' = 3$代入，求出$s = 5$.

平面上仿射变换的坐标表示

同理，直线$x+y+1=0$的原像是$x+2y=0$，存在数t，使得

$$x'+y'+1=t(x+2y).$$

求得$t=2$。于是可求出变换公式为

$$\begin{cases} x'=3x+y-2, \\ y'=-x+3y+1. \end{cases}$$