六、非直纹二次曲面

盛为民

椭球面

本节主要讨论椭球面、椭圆抛物面、双叶双曲面3种二次曲面。方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2.5.1}$$

的二次曲面称为椭球面。其中a,b,c是3个正常数。

(1) 有界性 $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c$, 这表明椭球面在一个由$-a\le x\le a, -b\le y\le b, -c\le z\le c$所围成的一个长方体内。

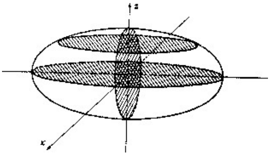
(2) 对称性 若点(x,y,z)在椭球面上，则点$(\pm x,\pm y,\pm z)$都在这个椭球面上。当$xyz\ne 0$时，这8个点两两不重合。因此椭球面关于3个坐标平面对称，关于原点也对称。

椭球面

(3) 平行截面 利用平行于坐标平面的平面去截曲面，可以了解该曲面的形状。现在我们先用平面$x=k$去截这个椭球面，得交线

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2}, \\ x=k, \quad -a\le k\le a. \end{cases}$$

这条交线是椭圆。



同样地，用平行于xz平面的平面$y=k$, $-b\le k\le b$去截椭球面，得到的截线也是椭圆；用平行于xy平面的平面$z=k$, $-c\le k\le c$去截椭球面，得到的截线也是椭圆. 如图所示。

椭球面

问题 如果$a < b < c$，是否存在过原点的平面，该平面截椭球面得到的截线是圆？

首先，考虑过y轴的平面$z = kx$, k是一个待定的常数。平面与椭球面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = kx. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

由此得

$$1 = \left(\frac{c^2 + a^2k^2}{a^2c^2}\right)x^2 + \frac{y^2}{b^2}. \tag{2.5.4}$$

如果交线C是圆，当点$(x, y, z) \in C$, 从(2.5.3)可看出点$(-x, y, -z) \in C$, 因而这圆的一条直径在y轴上，又点$(0, b, 0)$和$(0, -b, 0)$在这交线上，所以这两点是交线（即圆）的一条直径的两个端点。所以该圆的半径为b，圆心在原点。

椭球面

这个圆可以看成是以原点为球心，b为半径的球面和平面$z=kx$的交线。即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=b^2, \\ z=kx. \end{cases} \tag{2.5.5}$$

从而

$$1=\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{b^2}=\frac{y^2}{b^2}+\left(\frac{1+k^2}{b^2}\right)x^2. \tag{2.5.6}$$

由于圆C上有无穷多点(x,y,z)同时满足(2.5.3),(2.5.4),(2.5.5),(2.5.6).因而有

$$\frac{c^2+a^2k^2}{a^2c^2}=\frac{1+k^2}{b^2}.$$

椭球面

由此可解得

$$k = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}.$$

过y轴的所求平面有两张:

$$z + \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}x = 0$$

和

$$z + \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}x = 0.$$

椭球面

问题：是否还有其他经过原点的平面满足要求？

假设过原点的平面$\pi: Ax+By+Cz=0$与椭球面的截线是圆。当点(x,y,z)在截线上时，点$(-x,-y,-z)$也在这截线上，从而原点是这个圆的对称中心，原点必为圆心。设圆的半径为R, 则这个圆在以原点为中心，R为半径的球面上。从而圆上的点(x,y,z)满足

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x^2+y^2+z^2=R^2. \end{cases} \tag{2.5.11}$$

椭球面

方程(2.5.11)中两式相减，有

$$\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0. \quad (2.5.12)$$

原点满足(2.5.12), 截线上任一点(x,y,z)也满足(2.5.12). 从方程(2.5.12)可以看出，原点与这圆上的任一点(x,y,z)的连线上的所有点(可以写出(tx,ty,tz)形式)必满足(2.5.12). 这表明这截线圆所在平面π上的任一点必满足(2.5.12), 所以方程(2.5.12)的3个系数至少有一个为零（否则方程表示一个二次锥面，它不会包含一张平面）。由于$a<b<c$,

$$\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}<\frac{1}{R^2}-\frac{1}{b^2}<\frac{1}{R^2}-\frac{1}{c^2}.$$

只可能有$R=b$.

椭球面

代入(2.5.12),得

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0.$$

从而有

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}x+\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}z=0,$$

和

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}x-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}z=0.$$

这就是前面得到的过y轴的两平面。

椭圆抛物面

椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{2.5.17}$$

这里a, b是两个正常数。

1. 范围 由方程(2.5.17)可以看出，$z \geq 0$。因此图形在xy平面的上方。

2. 对称性 如果点(x, y, z)在曲面上，这点$(-x, y, z), (x, -y, z), (-x, -y, z)$都在曲面上，因此图形关于$z$轴对称。

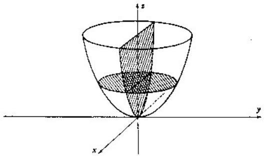
3. 平行截面 用平行于yz平面的平面$x = k$去截曲面得截线

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{k^2}{a^2}, \\ x = k. \end{cases}$$

这是一条抛物线。

椭圆抛物面

同样用平行与xz平面的平面$y=k$去截曲面，也得到抛物线。现在用平行于xy平面的平面$z=k>0$去截曲面得



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2k, \\ z=k. \end{cases}$$

这恰好是一个椭圆。

椭圆抛物面

问题 当$a < b$时，是否存在过原点的平面π, 截这个椭圆抛物面的截线是圆？

设平面π的方程为

$$Ax + By + z = 0.$$

这里A, B是待定常数。由于z前面的系数不能取0（否则截线是抛物线），所以取为1。截线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ Ax + By + z = 0. \end{cases}$$

令

$$\overrightarrow{e_3^*} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} (A, B, 1),$$

$$\overrightarrow{e}_1^* = \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} (-1, 0, A),$$

椭圆抛物面

$$\overrightarrow{e_2^*} = \overrightarrow{e_3^*} \times \overrightarrow{e_1^*} = \frac{1}{\sqrt{(A^2+1)(A^2+B^2+1)}} \left(AB, -\left(A^2+1\right), B\right).$$

建立新的直角坐标系$\{O, \overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}\}$. 这样可以写出两直角坐标系之间的坐标变换公式

$$X = DX^*.$$

其中D是变换矩阵。

椭圆抛物面

在新坐标系下，平面π的方程为$z^*=0$. 平面π上的截线方程为

$$\frac{1}{a^2\left(A^2+1\right)}x^{*2}-\frac{2AB}{a^2\left(A^2+1\right)\sqrt{A^2+B^2+1}}x^*y^*$$
$$+\left[\frac{A^2B^2}{a^2\left(A^2+1\right)\left(A^2+B^2+1\right)}+\frac{A^2+1}{b^2\left(A^2+B^2+1\right)}\right]y^{*2}$$
$$-\frac{2A}{\sqrt{A^2+1}}x^*-\frac{2B}{\sqrt{\left(A^2+1\right)\left(A^2+B^2+1\right)}}y^*=0$$

椭圆抛物面

令

$$B=0, a^2(A^2+1)=b^2,$$

即取

$$A=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}, B=0.$$

则在平面π上的截线为

$$x^{*2}+y^{*2}\pm 2b\sqrt{b^2-a^2}x^*=0.$$

这个方程是圆。此时平面π的原方程为

$$\sqrt{b^2-a^2}x+az=0,$$

或

$$\sqrt{b^2-a^2}x-az=0.$$

这两张平面与椭圆抛物面的截线是圆。

双叶双曲面

双叶双曲面的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

这里a,b,c是3个正常数。

1. 对称性 曲面关于平面$x=0$, 平面$y=0$，平面$z=0$对称，关于原点也对称。

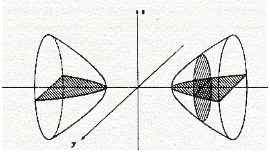
2. 范围 由方程可知

$$|z|\geq c.$$

3. 平行截面 用平面$z=k,|k|\geq c$去截这双叶双曲面时，截线是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2}-1,\\ z=k.\end{cases}$$

双叶双曲面



用平面$x=k$去截时，截线是双曲线

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{a^2}, \\ x=k. \end{cases}$$

类似地，用平面$y=k$去截时，截线也是双曲线

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{k^2}{b^2}, \\ y=k. \end{cases}$$

如图所示。

双叶双曲面

问题：设$a > b$，是否存在平行于x轴的一张平面π，它与双叶双曲面的截线是圆？

设所求的平面π为

$$Ay + z + B = 0,$$

这里A, B是不全为零的待定系数。类似前面，令

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_3^*} &= \frac{1}{\sqrt{A^2+1}}(0, A, 1)\,, \\
\overrightarrow{e_1^*} &= \frac{1}{\sqrt{A^2+1}}(0, 1, -A)\,, \\
\overrightarrow{e_2^*} &= \overrightarrow{e_3^*} \times \overrightarrow{e_1^*} = (-1, 0, 0)\,.
\end{aligned}$$

双叶双曲面

取平面π上一点$(0,0,-B)$为新的直角坐标系的原点O^*, 建立新的直角坐标系$\{O^*, \overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}\}$. 于是有坐标变换公式

$$X = DX^* + \alpha,$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/\sqrt{A^2+1} & 0 & A/\sqrt{A^2+1} \\ -A/\sqrt{A^2+1} & 0 & 1/\sqrt{A^2+1} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix}$$

双叶双曲面

在新的直角坐标系下，平面π的方程是$z^* = 0$. 在平面π上，截线方程为

$$\frac{1}{A^2+1}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{A^2}{c^2}\right)x^{*2}+\frac{1}{a^2}y^{*2}-\frac{2AB}{c^2\sqrt{A^2+1}}x^*=\frac{B^2}{c^2}-1.$$

首先选择A, 使得

$$\frac{1}{A^2+1}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{A^2}{c^2}\right)=\frac{1}{a^2},$$

由此解得

$$A=\pm\sqrt{\frac{(1/b^2)-(1/a^2)}{(1/a^2)+(1/c^2)}}.$$

双叶双曲面

再代入方程进行配方，选择合适的B，就可得到所要求的平面。（略）

例题 求3个非零实数a, b, c满足的充分必要条件，使得平面$ax + by + cz = 0$与曲面$xy + yz + zx = 0$的交线是两条互相垂直的直线。

解 选择一个新的直角坐标系$Ox^*y^*z^*$，使得题中的平面方程为$z^* = 0$,题中的曲面在新的直角坐标系下与平面$z^* = 0$的交线就容易求了。取

$$\overrightarrow{e_3^*} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c),$$

$$\overrightarrow{e_1^*} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a, 0),$$

双叶双曲面

$$\overrightarrow{e_2^*} = \overrightarrow{e_3^*} \times \overrightarrow{e_1^*} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \left(ac, bc, -\left(a^2+b^2\right)\right).$$

由此可写出坐标变换公式$X = AX^*$, 从而可以得到在新坐标系下，在平面$z^* = 0$上的曲线的方程为

$$-\frac{ab}{a^2+b^2}x^{*2} + \frac{(a-b)\left[\left(a^2+b^2\right) - c\,(a+b)\right]}{\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x^*y^* + \frac{abc^2 - \left(a^2+b^2\right)(a+b)\,c}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}y^{*2} = 0$$

双叶双曲面

从题目条件可知，存在两条互相垂直的直线为交线，因此上述方程等价于下述方程

$$\left(ax^* - \frac{\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y^*\right)\left(bx^* - \frac{\beta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y^*\right) = 0.$$

这里α, β是实数，满足

$$\begin{cases} b\alpha + a\beta = (a-b)\left[\left(a^2+b^2\right) - c\,(a+b)\right], \\ \alpha\beta = \left(a^2+b^2\right)(a+b)\,c - abc^2. \end{cases}$$

双叶双曲面

分析：若$\alpha = 0$，为了使两直线垂直，β必等于$+\infty$或$-\infty$。这与上述第一式矛盾。所以$\alpha \neq 0$。同理，$\beta \neq 0$。两条直线的斜率为$\frac{a\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\alpha}$，$\frac{b\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\beta}$。由于这两条直线垂直，有

$$\frac{a\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\alpha}\frac{b\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\beta} = -1.$$

化简整理得

$$ab + bc + ca = 0. \tag{$*$}$$

等式(*)是两交线垂直得必要条件。利用(*)还可以证明这个条件是两直线垂直的充分条件。

双叶双曲面

例题 设二次曲面族$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$，这里正常熟$a>b>c$，对于不等于$a^2, b^2, c^2$的一个$\lambda$值，它表示一张二次曲面。求证：对空间中任意一点$(x_0, y_0, z_2)$，这里$x_0, y_0, z_0$是3个非零实数，恰有二次曲面族中的3张曲面通过，而且他们分别是单叶双曲面、双叶双曲面和椭球面。

证明 对于空间任意一点(x_0, y_0, z_2)，令

$$f(\lambda)=\frac{x_0^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2-\lambda}-1,$$

这里$\lambda\in\left(-\infty, c^2\right)\cup\left(c^2, b^2\right)\cup\left(b^2, a^2\right)\cup\left(a^2, \infty\right).$

双叶双曲面

由于$\lim_{\lambda\to a^2_-} f(\lambda)=+\infty, \lim_{\lambda\to b^2_+} f(\lambda)=-\infty$, 则连续函数$f(\lambda)$在$(b^2,a^2)$内有一实根$\lambda_1$，即

$$f(\lambda_1)=\frac{x_0^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z_0^2}{c^2-\lambda_1}-1=0,$$

而二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1, \tag{1}$$

表示一张双叶双曲面，并且通过点(x_0,y_0,z_2)。

双叶双曲面

同理可证，连续函数$f(\lambda)$在(c^2, b^2)和$(-\infty, c^2)$内分别存在实根λ_2，λ_3，满足

$$f(\lambda_2) = \frac{x_0^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y_0^2}{b^2 - \lambda_2} + \frac{z_0^2}{c^2 - \lambda_2} - 1 = 0,$$

和

$$f(\lambda_3) = \frac{x_0^2}{a^2 - \lambda_3} + \frac{y_0^2}{b^2 - \lambda_3} + \frac{z_0^2}{c^2 - \lambda_3} - 1 = 0.$$

曲面

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_2} = 1, \tag{2}$$

和

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_3} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_3} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_3} = 1, \tag{3}$$

分别表示通过点(x_0, y_0, z_2)的单叶双曲面和椭球面。证毕