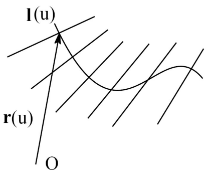
五、直纹面

盛为民

直纹面定义

直纹面定义 如果曲面S上有一族单参数直线（随着一个参数变化的一族直线），而S的每一点都在这族直线上，则S称为直纹面。这一族直线中的每一条直线都称为直母线。

例如，柱面、锥面都是直纹面。在二次曲面中，椭圆柱面，双曲柱面，抛物柱面，都是直纹面。



如图，设$\overrightarrow{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $u \in [a, b]$是一条空间曲线C, 曲面

$$\overrightarrow{X}(u, v) = \overrightarrow{r}(u) + v\overrightarrow{l}(u)$$

就是直纹面，这里$\overrightarrow{l}(u)$是依赖于u的非零向量。

单叶双曲面

二次曲面中的单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2.4-1)$$

a, b, c是3个正常数。

定理1 单叶双曲面是直纹面。
首先我们对曲面方程进行分解，得

$$(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=(1+\frac{y}{b})(1-\frac{y}{b}). \qquad (2.4-2)$$

单叶双曲面

引进不等于0的参数u，并考察由上式得到的方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{2.4-3}$$

与两方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \\ 1-\frac{y}{b}=0; \end{cases} \tag{2.4-4}$$

和

$$\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \\ 1+\frac{y}{b}=0. \end{cases} \tag{2.4-5}$$

方程(2.4-4)和(2.4-5)实际上是方程(2.4-3)中分别令$u\to 0$和$u\to\infty$时的极限情形。

单叶双曲面

不论上述u取何值，(2.4-3,4,5)都表示直线，我们称这一族直线为u族直线。现在我们来证明**由这u族直线可以构成曲面(2.4-1)，从而它是单叶双曲面的一族直母线。**

(1) 易知，u族直线中的任何一条直线上的点，都在曲面(2.4-1)上，这是因为方程(2.4-3)中两方程左右两边相乘，就得(2.4-1). 这说明直线(2.4-3)上的点，都在曲面(2.4-1)上。同理，对于直线(2.4-4, 5)上的点，也都在曲面(2.4-2)上。
(2) 反过来，设(x_0, y_0, z_0)是曲面(2.4-1)上的点，从而有

$$(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c})(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c})=(1+\frac{y_0}{b})(1-\frac{y_0}{b}). \qquad (2.4-6)$$

单叶双曲面

显然$(1+\frac{y_0}{b})$和$(1-\frac{y_0}{b})$不能同时为0，因此不失一般性，假设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$，那么取$u$使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u(1+\frac{y_0}{b}),$$

由(2.4-6)得

$$\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}(1-\frac{y_0}{b}).$$

所以点(x_0,y_0,z_0)在直线(2.4-3)上。如果$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$, 那么由(2.4-6)知，$1-\frac{y_0}{b}=0$, 所以点$(x_0,y_0,z_0)$在直线(2.4-4)上。因此$u$族直线可以构成曲面(2.4-1)。

单叶双曲面

同样可以证明由直线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{2.4-7}$$

（其中v为不等于0的任意实数）与另两直线（相当于(2.4-7)中当$v \to 0$和$v \to \infty$的情形）

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ 1 + \frac{y}{b} = 0; \end{cases} \tag{2.4-8}$$

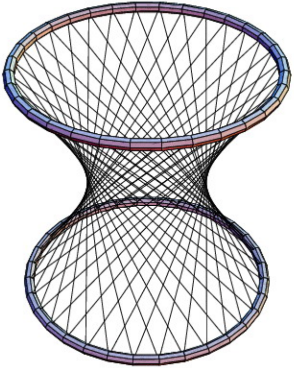
与

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ 1 - \frac{y}{b} = 0. \end{cases} \tag{2.4-9}$$

合在一起组成的直线族是单叶双曲面(2.4-1)的另一族直母线，我们称它为v族直母线。

单叶双曲面

如图表示两族直母线在单叶双曲面上大概的分布情况。



单叶双曲面

推论 对于单叶双曲面上的每一点，两族直母线中各有一条直母线通过这一点。

该结论可直接由定理1得到。

为了避免取极限的情况，我们常把(2.4-3)-(2.4-5)中的u线写为

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{2.4-10}$$

直线只依赖于$u:w$. v族线(2.4-7)-(2.4-9),写为

$$\begin{cases} t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{2.4-11}$$

该直线族(2.4-11)只依赖于$v:t$.

单叶双曲面

定理2　单叶双曲面上异族的任意两条直母线必共面，同族的任意两条直母线总是异面直线。

为证明这个定理，我们先证明一个引理。

引理　两直线

$$L_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0,\end{cases}$$

共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0$$

单叶双曲面

引理的证明 通过L_1的任一平面为

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)$$
$$+\lambda_2\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$$

其中λ_1,λ_2为任意不全为零的实数；通过L_2的任意平面为

$$\lambda_3\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)$$
$$+\lambda_4\left(A_4x+B_4y+C_4z+D_4\right)=0$$

其中λ_3,λ_4不全为零。两直线L_1,L_2在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$，使得上述两平面代表同一平面，即存在$m\neq 0$，满足

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\lambda_2\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)$$
$$\equiv m[\lambda_3\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)+\lambda_4\left(A_4x+B_4y+C_4z+D_4\right)]$$

单叶双曲面

引理的证明续 化简并整理得

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - m\lambda_3 A_3 - m\lambda_4 A_4 &= 0 \\
\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - m\lambda_3 B_3 - m\lambda_4 B_4 &= 0 \\
\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - m\lambda_3 C_3 - m\lambda_4 C_4 &= 0 \\
\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - m\lambda_3 D_3 - m\lambda_4 D_4 &= 0
\end{aligned}
$$

因为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$不全为零，所以有

$$
\begin{vmatrix}
A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\
B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\
C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\
D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4
\end{vmatrix} = 0
$$

单叶双曲面

引理的证明续 而$m \neq 0$, 因此两直线共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

引理证毕。

单叶双曲面

定理2的证明 先证异族的两直母线共面。对于由(2.4-10)和(2.4-11)给定的两直线，它们的系数构成的行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{w}{a} & -\frac{u}{b} & \frac{w}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{w}{b} & -\frac{u}{c} & -w \\ \frac{t}{a} & \frac{v}{b} & \frac{t}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{t}{b} & -\frac{v}{c} & -t \end{vmatrix} = \cdots = 0$$

由引理知，两直线共面。事实上，我们还可以证明两直线不重合。类似可证，对于同族的两直线，例如由(2.4-10)给定的u族线，参数分别为$u_1 w_1$和$u_2 : w_2$，

$$\begin{vmatrix} \frac{w_1}{a} & -\frac{u_1}{b} & \frac{w_1}{c} & -u_1 \\ \frac{u_1}{a} & \frac{w_1}{b} & -\frac{u_1}{c} & -w_1 \\ \frac{w_2}{a} & -\frac{u_2}{b} & \frac{w_2}{c} & -u_2 \\ \frac{u_2}{a} & \frac{w_2}{b} & -\frac{u_2}{c} & -w_2 \end{vmatrix} = -\frac{4\left(u_1 w_2 - u_2 w_1\right)^2}{abc} \neq 0$$

单叶双曲面

定理2的证明续 由引理知两直线是异面直线。定理2证毕。

对于单叶双曲面，还有其他一些有趣的性质。平面$z=0$与单叶双曲面(2.4-1)的交线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

称为单叶双曲线的腰椭圆。

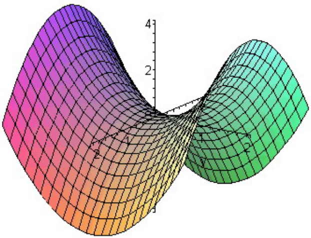
定理3 （1）单叶双曲面的直母线始终与腰椭圆相交;
（2）过腰椭圆上任意一点的两条直母线张成的平面与腰椭圆所在的平面垂直。

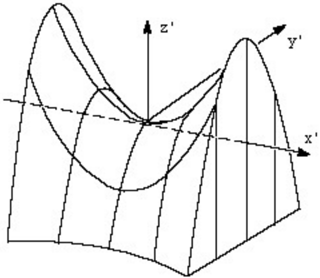
双曲抛物面

方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

的二次曲面称为双曲抛物面。它的形状如图所示。由于其形状像马鞍，因此也习惯称为马鞍面。





双曲抛物面

我们同样可以证明双曲抛物面上也有两族直母线，它们的方程分别是

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u, \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \tag{2.4-12}$$

与

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v, \\ v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \tag{2.4-13}$$

并且也有下面的结论:

定理4 对于双曲抛物面上每一点，两族直母线中各有一条直母线经过。

双曲抛物面

定理5 （1）双曲抛物面上异族的任意两条直母线必相交;
（2）同族的全体直母线平行于同一平面;
（3）同族的两条直母线异面。
证明: （1）直接通过解方程，可知这两条直线有唯一交点。
（2）对于u族直母线，它们都平行与平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

对于v族直母线，它们都平行与平面

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

（3）对于u族线中不同的两个u_1, u_2, 利用前面引理的结论，可以证明相应的四阶行列式$\neq 0$. 从而是异面直线。

二次锥面

二次锥面的方程为

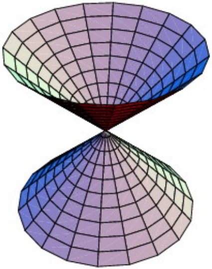
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

这里a,b,c是正常数。上述二次锥面方程又可以写成向量式参数方程的形式

$$\overrightarrow{r}(u,v)=(x,y,z)=v\,(a\cos u,b\sin u,c)$$

这里$u\in[0,2\pi),v\in(-\infty,\infty)$. 比较一开始出现的直纹面方程，易知，这是直纹面方程。它的图形如图所示。

二次锥面



在这二次锥面上任取一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，原点O与点M_0的连线上任意一点$M(tx_0, ty_0, tz_0)$都满足二次锥面的方程，从这一点，也可以说明二次锥面是直纹面。

例题

例题1 求过单叶双曲面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$上的点$(6,2,8)$的直母线方程。

解：两族直母线的方程是

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=u\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ u\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=w\left(1-\frac{y}{2}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} t\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=v\left(1-\frac{y}{2}\right), \\ v\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=t\left(1+\frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

例题

将点$(6,2,8)$分别代入上述两个方程，求得$w:u=1:2$和$t=0$，代入，可求得两直母线方程为

$$\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0; \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} y-2=0, \\ 4x-3z=0. \end{cases}$$

例题

例题2 设L_1和L_2是两条不相交的异面直线，分别通过L_1和L_2作两个互相垂直的平面。求证：交线的轨迹是单叶双曲面或两张相交平面。

例题

例题3 求双曲抛物面$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$上过点$(4,3,0)$的两条直母线方程，并求其夹角。

例题

例题4 确定实数m的值，使平面$x+y-mz=0$与单叶双曲面$x^2+y^2-z^2=1$相交，交线分别为椭圆、双曲线。