四、二次曲面的分类

盛为民

矩阵运算初步

矩阵的加法，数乘运算的定义，性质。

矩阵的乘法运算的定义，性质。

矩阵的转置，性质。

正交矩阵的定义，对称矩阵和反称矩阵的定义，性质。

矩阵运算初步

二次曲面的定义及其矩阵表示 在直角坐标系$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$中，由3元2次方程

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + C = 0 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

表示的曲面称为二次曲面。这里系数a_{ij}是不全为零的实数，b_1,b_2,b_3和C也都是实数。令矩阵

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

则矩阵$D = D^T$，即D是一个非零的对称矩阵。

矩阵运算初步

又令

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \tag{2.3.3}$$

则

$$\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

设$A = (b_{ij})_{3\times3}$是一个正交矩阵（$|A| = \pm1$），它是一个从正交标架$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$到正交标架$\{O;\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}\}$的变换矩阵。即有形式表达式

$$(\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}) = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})A^T,$$

矩阵运算初步

或写成

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1^*} \\ \overrightarrow{e_2^*} \\ \overrightarrow{e_3^*} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix}$$

则由上节得到的坐标旋转变换公式可写成矩阵形式

$$X = A^T X^*, X^T = (X^*)^T A.$$

注 这里要特别注意，我们现在允许$\overrightarrow{e_1}^*, \overrightarrow{e_2}^*, \overrightarrow{e_3}^*$构成左手系。

二次曲面的旋转不变量

一、二次曲面的旋转不变量 利用坐标系$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$到$\{O;\vec{e_1^*},\vec{e_2^*},\vec{e_3^*}\}$的变换关系，容易计算出

$$\Phi(x,y,z)=(x,y,z)\,D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$=(x^*,y^*,z^*)\,ADA^T\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}$$
$$=(x^*,y^*,z^*)\,D^*\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}\doteq\Phi^*(x^*,y^*,z^*)$$

其中

$$D^*=ADA^T$$

二次曲面的旋转不变量

由于

$$(D^*)^T = D^* \doteqdot \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$$

我们就有

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) = {} & a_{11}^* x^{*2} + 2a_{12}^* x^* y^* + a_{22}^* y^{*2} \\ & + 2a_{13}^* x^* z^* + 2a_{23}^* y^* z^* + a_{33}^* z^{*2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x,y,z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^*,y^*,z^*)\,AA^T\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \\ &= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}. \end{aligned}$$

二次曲面的旋转不变量

由此我们可得

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}-\lambda)\,x^2 + (a_{22}-\lambda)y^2 + (a_{33}-\lambda)z^2 \\
&+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\
&= \Phi\,(x,y,z) - \lambda\left(x^2+y^2+z^2\right) \\
&= \Phi^*\,(x^*,y^*,z^*) - \lambda\left(x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}\right) \\
&= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} a_{11}^*-\lambda & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^*-\lambda & a_{23}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^*-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

二次曲面的旋转不变量

再利用

$$(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A^T$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

我们可得

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} a_{11}^*-\lambda & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^*-\lambda & a_{23}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^*-\lambda \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

二次曲面的旋转不变量

从而有

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} a_{11}^*-\lambda & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^*-\lambda & a_{23}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^*-\lambda \end{pmatrix} A$$

等式两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^*-\lambda & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^*-\lambda & a_{23}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^*-\lambda \end{vmatrix} \tag{2.3.38}$$

二次曲面的旋转不变量

给定一个方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

我们定义

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

为矩阵A的特征多项式。(2.3.38)表明对称矩阵D的特征多项式在坐标的正交变换$X^* = AX$下变为对称矩阵$D^* = ADA^T$的特征多项式。

二次曲面的旋转不变量

展开(2.3.38)式，就有

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = \lambda^3 - I_1^*\lambda^2 + I_2^*\lambda - I_3^*$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = trD, \\
I_1^* &= a_{11}^* + a_{22}^* + a_{33}^* = trD^* \ , \\
I_2 &= (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}) \\
&\quad - \left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2\right) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \\
I_2^* &= \cdots\cdots \\
I_3 &= |D|\,, I_3^* = |D^*|
\end{aligned}$$

二次曲面的旋转不变量

由于λ是任一实数，因此有

$$I_1 = I_1^*, I_2 = I_2^*, I_3 = I_3^*. \tag{2.3.41}$$

(2.3.41)表明在保持原点的直角坐标变换下，对应的I_1, I_2, I_3不变。

特征方程和特征根

二、特征方程和特征根 考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \lambda x, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = \lambda y, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = \lambda z. \end{cases} \tag{2.3.42}$$

上述方程组等价于

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + (a_{33} - \lambda)z = 0. \end{cases} \tag{2.3.43}$$

关于λ的一元三次方程

$$|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3.44}$$

成为矩阵D的特征方程。

特征方程和特征根

利用上节引入的几个不变量，矩阵D的特征方程可写为

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \tag{2.3.45}$$

满足方程(2.3.45)的根λ称为矩阵D的特征根。由于(2.3.45)是一元三次实系数方程，因而至少有一个实根λ_3，对应于λ_3，满足方程组(2.3.42)的非零解(x, y, z)称为对应于特征值λ_3的特征向量，也称为特征根λ_3的主方向。

把(2.3.42)写成矩阵形式

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$DA^T\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \lambda A^T \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

特征方程和特征根

两边同时左乘A得

$$D^* \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \tag{2.3.48}$$

这个方程组的另一表达形式为

$$\begin{cases} a_{11}^* x^* + a_{12}^* y^* + a_{13}^* z^* = \lambda x^*, \\ a_{12}^* x^* + a_{22}^* y^* + a_{23}^* z^* = \lambda y^*, \\ a_{13}^* x^* + a_{23}^* y^* + a_{33}^* z^* = \lambda z^*. \end{cases} \tag{2.3.49}$$

特征方程和特征根

从上述推导可以看出，在直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$中，对应于特征根$\lambda_3$的主方向$(x,y,z)$，在另一直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}\}$中变换为对应于同一特征值$\lambda_3$的主方向$(x^*,y^*,z^*)$. 由于

$$(x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1^*}\\ \overrightarrow{e_2^*}\\ \overrightarrow{e_3^*}\end{pmatrix}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{pmatrix}$$

从向量而言，主方向仍是主方向，只是在不同的坐标系下，其坐标不一样而已。

特征方程和特征根

定理1 经过适当坐标变换，$\Phi(x,y,z)$总可以化为标准形式$\lambda_1 x^{*2}+\lambda_2 y^{*2}+\lambda_3 z^{*2}$，其中实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是对应矩阵$D$的3个特征根。

证明 第一步 选取特征值λ_3对应的主方向$(x,y,z)\neq O$平行于新的直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}\}$中的向量$\overrightarrow{e_3^*}$. 这时在新的直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}\}$中相应于特征值$\lambda_3$的特征向量为$(0,0,1)$. 由此可知

$$a_{13}^*=0, a_{23}^*=0, a_{33}^*=\lambda_3.$$

从而

$$\Phi(x,y,z)=\Phi(x^*,y^*,z^*)=a_{11}^*x^{*2}+2a_{12}^*x^*y^*+a_{22}^*y^{*2}+\lambda_3 z^{*2}.$$

特征方程和特征根

第二步 **引理1** 非零实对称矩阵D的特征根全是实数。

现在已经选取了$\overrightarrow{e_3^*}$作为主方向后，特征多项式变为

$$\begin{vmatrix} a_{11}^* - \lambda & a_{12}^* & 0 \\ a_{12}^* & a_{22}^* - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$(\lambda_3 - \lambda)\left[(a_{11}^* - \lambda)(a_{22}^* - \lambda) - (a_{12}^*)^2\right] = 0$$

从而另外两个特征根λ_1, λ_2为一元二次方程

$$(a_{11}^* - \lambda)(a_{22}^* - \lambda) - (a_{12}^*)^2 = 0$$

的两个根。

特征方程和特征根

其判别式为

$$\Delta=(a_{11}^{*}-a_{22}^{*})^{2}+4a_{12}^{*2}\geq 0.$$

所以有两个实根。即D的特征根全部是实数。

每个特征根至少有一个相应的非零主方向，这些主方向线性无关（即不共面），但在3维欧氏空间中，最多只有3个不共面的向量，因此一共就只有3个主方向，每个主方向相应于一个特征根。

特征方程和特征根

第三步 **引理2** 非零实对称矩阵D的3个特征根至少有一个不为零。（用反证法易证）

第四步 **引理3** 可以选取对应3个特征根的主方向，使得它们相互垂直。

第五步 取新的直角坐标系$\{O, \overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}\}$，使得$\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}$分别为特征值$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$的主方向，由此可得:

$$a_{12}^* = 0, a_{11}^* = \lambda_1, a_{22}^* = \lambda_2,$$

所以有

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x^*, y^*, z^*) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \lambda_3 z^{*2}.$$

定理1证毕。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

三、二次曲面方程的化简与二次曲面分类 利用定理1，取新的直角坐标系$\{O,\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}\}$，使得$\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*}$分别为特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的主方向，

$$\begin{aligned}F(x,y,z)=&\lambda_1x^{*2}+\lambda_2y^{*2}+\lambda_3z^{*2}\\&+2b_1^*x^*+2b_2^*y^*+2b_3^*z^*+C=0\end{aligned}$$

下面就是要根据$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中等于零的个数分别进行讨论。

1. 特征根$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$都不为零

A. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$同号:

(1)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

对应的曲面称为椭球面。这里及下述的a,b,c都是正常数。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

(2)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

对应的曲面不存在，称为虚椭球面。

(3)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

曲面退化为一个点（原点）。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

B.$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$不同号（两正一负或两负一正）：

(4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

对应的曲面称为单叶双曲面。

(5)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

对应的曲面称为双叶双曲面。

(6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

对应的曲面称为二次锥面。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$**中有一个为0**（不妨设$\lambda_3 = 0$）

(1) λ_1, λ_2同号，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

对应的曲面称为椭圆抛物面。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

对应的曲面称为椭圆柱面。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

对应的曲面称为虚椭圆柱面。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

(2) λ_1, λ_2异号，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

对应的曲面称为双曲抛物面。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

对应的曲面称为双曲柱面。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

对应的曲面退化为两张相交与z轴的平面。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

3. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$**中有两个为0**（不妨设$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$）

(1)

$$x^2 - 2py = 0$$

对应的曲面称为抛物柱面。

(2)

$$x^2 - a^2 = 0$$

对应的曲面为为一对平行平面。

(3)

$$x^2 + a^2 = 0$$

对应无曲面，称为一对虚平行平面。

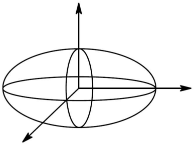
(4)

$$x^2 = 0$$

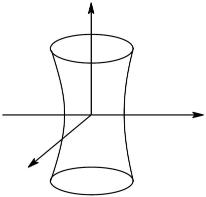
对应的曲面为一对重合平面$x = 0$。

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

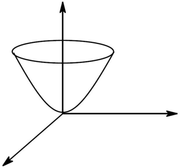
定理2 二次曲面化为标准形式，一共有17类。如图所示。



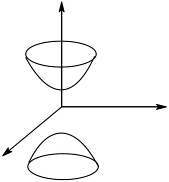
(a) 椭球面



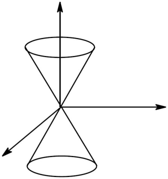
(b) 单叶双曲面



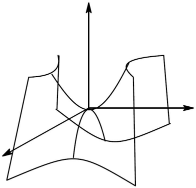
(d) 椭球抛物面



(c) 双叶双曲面

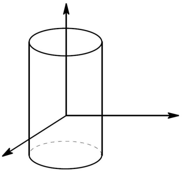


(e) 二次锥面

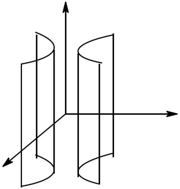


(f) 双曲抛物面

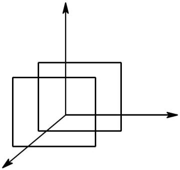
二次曲面方程的化简与二次曲面分类



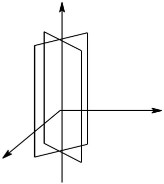
(g) 圆柱面



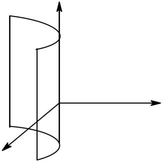
(h) 双曲柱面



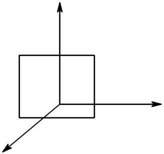
(i) 一对平行平面



(j) 一对相交平面



(k) 抛物柱面



(l) 一对重合平面

二次曲面方程的化简与二次曲面分类

例题1 求下列曲面的标准化方程

$$x^2+y^2+z^2-xy+xz-yz-2y-2z+2=0$$

解 第一步
求出三个特征值$\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_3=2.$
第二步
求出三个特征值相应的主方向，并进行正交化，单位化。得到新的直角坐标系。
第三步
写出坐标变换公式以及在新坐标系下曲面的方程。
第四步
配方，作坐标平移，就得到最后结果。