三、曲线与二次曲面

盛为民

空间曲面的定义

在上一节，已经知道，$F(x,y,z)=Ax+By+Cz+D=0$表示空间一张平面。该平面方程又可表为参数形式

$$\overrightarrow{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=\overrightarrow{r_0}+u\overrightarrow{a}+v\overrightarrow{b}.$$

其中$\overrightarrow{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$, $\overrightarrow{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$, $\overrightarrow{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$, 从而我们有

$$\begin{cases} x(u,v)=x_0+uX_1+vX_2, \\ y(u,v)=y_0+uY_1+vY_2, \\ z(u,v)=z_0+uZ_1+vZ_2. \end{cases}$$

其中u,v为参数。

空间曲面的定义

一般地，在R^3内给定一个三元函数$F(x,y,z)$. 方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{2.1.1}$$

的一组解(x,y,z)在R^3内表示一个点，其坐标为(x,y,z). 满足方程(2.1.1)的所有解在R^3内所构成的图形称为满足方程(2.1.1)的曲面。该方程称为曲面的方程。

如果$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$都是u,v的函数。则由

$$\overrightarrow{X}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \tag{2.1.9}$$

确定的R^3中的图形也称为曲面。一般在(2.1.1)中的F和(2.1.9)中的x,y,z满足一定的可微性条件下，两个方程可以互化（利用数学分析中的隐函数定理）。方程(2.1.9)称为方程(2.1.1)的参数形式。

空间曲面的定义

空间曲面的例子

例1 求以点$M_0(x_0, y_0, z_0)$为球心、以正常数R为半径的球面的方程。

答案:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{2.1.2}$$

例2 求以z轴为轴线、半径为$R > 0$的正圆柱面的方程。

答案:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2.1.4}$$

例3 求以直线$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$为轴线、半径为5的正圆柱面的方程。

答案:

$$(y - z - 1)^2 + (z - x)^2 + (x - y + 1)^2 = 75. \tag{2.1.7}$$

空间曲线的定义

设$x(t), y(t), z(t)$都是t的函数，这里$t \in [a, b]$,

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{2.1.8}$$

称为R^3内一条曲线。

例4 $\overrightarrow{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, 这里$R$是正常数，$t \in [0, 2\pi]$. 这条曲线是平面$z = 0$上一条以原点为圆心、以$R$为半径的圆周。

例5 $\overrightarrow{r}(t) = (a\sec t, b\tan t, c)$, 这里$a, b, c$都是正常数，$t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 这条曲线是平面$z = c$上的一支双曲线。

例6 $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos wt, a\sin wt, vt)$, 这里$a, w, v$都是正常数，$-\infty < t < \infty$, 这条曲线称为螺旋线。它落在正圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$上。

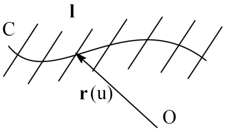
用参数方程表示的一些特殊曲面

以下介绍几种用参数方程表示的曲面。

一、柱面

设$\overrightarrow{r}(u)=(x(u),y(u),z(u))$是$R^3$内一条曲线$C$，如图，这里$u\in[a,b]$. $\overrightarrow{l}=(l_1,l_2,l_3)$是一个非零的常向量。设

$$\overrightarrow{X}(u,v)=\overrightarrow{r}(u)+v\overrightarrow{l}, \tag{2.1.10}$$



这里$u\in[a,b],-\infty<v<\infty$. 由(2.1.10)确定的曲面称为一般柱面。曲线C称为柱面的准线。(2.1.10)表示以$\overrightarrow{l}$为方向向量的直线沿着曲线C平行移动所得的曲面。

用参数方程表示的一些特殊曲面–柱面

例如，取$\overrightarrow{r}(u)=(R\cos u, R\sin u, 0), u\in[0,2\pi]$, $\overrightarrow{l}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{X}(u,v)=(R\cos u, R\sin u, v)$恰好是例2中正圆柱面的参数方程。

以下我们把例3写成参数方程的形式。关键是适当地选取准线。按课本P38-39的方法，选取准线，则参数方程可写为

$$\overrightarrow{X}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=\overrightarrow{r}(u)+v(\sqrt{3}\overrightarrow{e_3}),$$

其中$u\in[0,2\pi], v\in(-\infty,\infty)$,

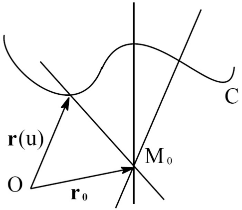
$$\begin{cases} x(u,v)=1+\frac{5}{\sqrt{2}}\cos u-\frac{5}{\sqrt{6}}\sin u+v, \\ y(u,v)=2+\frac{10}{\sqrt{6}}\sin u+v, \\ z(u,v)=1-\frac{5}{\sqrt{2}}\cos u-\frac{5}{\sqrt{6}}\sin u+v. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

用参数方程表示的一些特殊曲面–柱面

显然(2.1.16)满足(2.1.7). 从上述计算可以看出，采用普通方程形式还是参数方程形式，要视具体问题而定，例如，例3用普通方程来表示，要简单得多。

用参数方程表示的一些特殊曲面–锥面

如图，已知空间一条曲线C和不在C上的一点M_0，由M_0和C上的点的连线所构成的曲面称为『锥面』。点M_0称为锥面的顶点，C称为锥面的准线。



锥面的参数方程 设曲线$C: \overrightarrow{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, 锥面的参数方程为

$$\overrightarrow{X}(u,v) = \overrightarrow{r_0} + v(\overrightarrow{r(u) - r_0}). \quad (2.1.17)$$

用参数方程表示的一些特殊曲面–锥面

例7 求锥面方程，使得准线方程是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = C, \end{cases}$$

这里R, C都是正常数，顶点为原点。

解 第一步，我们将准线写为如下的参数方程的形式

$$\overrightarrow{r}(u) = (R\cos u, R\sin u, C), \; u \in [0, 2\pi].$$

第二步，写出锥面的矢量式参数方程

$$\overrightarrow{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = v\overrightarrow{r}(u).$$

第三步，坐标式参数方程:

$$x(u, v) = Rv\cos u, y(u, v) = Rv\sin u, z(u, v) = Cv,$$

$u \in [0, 2\pi], v \in (-\infty, \infty).$

用参数方程表示的一些特殊曲面–锥面

上述方程又可写成普通方程形式:

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2 z^2}{C^2}.$$

注 一条准线是圆，锥面顶点与这个圆的圆心的连线垂直于这个圆所在的平面，这个锥面称为圆锥面。上例中的曲面就是圆锥面。

用参数方程表示的一些特殊曲面–锥面

例8 求以原点为顶点，准线为

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=h, \end{cases}$$

的锥面方程，这里h是一个非零常数。

解 第一步，写出准线的参数方程。这里可以选择曲线的弧长u作为参数（选择曲线上任意一个固定点作为起点，“向前”时，$u>0$，“向后”时，$u<0$.）这时，准线方程可以“抽象地”写成

$$\overrightarrow{r}(u)=(x(u),y(u),h),\ f(x(u),y(u))=0.$$

第二步，写出锥面的向量式参数方程。

$$\overrightarrow{X}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=v\overrightarrow{r}(u).$$

用参数方程表示的一些特殊曲面–锥面

从而有,第三步，坐标式参数方程

$$\begin{cases} x(u,v) = x^* = vx(u), \\ y(u,v) = y^* = vy(u), \\ z(u,v) = z^* = hv, \end{cases}$$

消去参数:

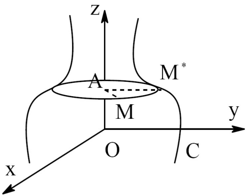
$$x(u) = x^*/v = hx^*/z^*, y(u) = y^*/v = hy^*/z^*,$$

代入方程$f(x,y)=0$, 得到

$$f(\frac{hx^*}{z^*}, \frac{hy^*}{z^*}) = 0.$$

用参数方程表示的一些特殊曲面–旋转面

旋转面的定义 空间一条曲线$C: \vec{r}(u) = (f(u), g(u), h(u))$, 这里$u \in [a, b]$. 曲线$C$绕一条直线$l$旋转一周而得到的曲面，称为以$l$为轴的旋转面。如图，曲线$C$绕着$z$轴旋转一周而得一旋转面。



现在我们就考虑曲线C绕z轴旋转而成的旋转面。在曲面上任取一点$M(x, y, z)$, 它是由曲线C上一点$M^*(f(u), g(u), h(u))$绕z轴旋转而成。于是$z = h(u)$. 过点M^*作一垂直于z轴的平面，交z轴于点$A(0, 0, h(u))$，线段AM^*的长度=线段AM的长度, 因而有

$$x^2 + y^2 = (f(u))^2 + (g(u))^2.$$

用参数方程表示的一些特殊曲面–旋转面

从而绕z轴的旋转面的方程为

$$X(u,v)=\left(\sqrt{(f(u))^2+(g(u))^2}\cos v,\sqrt{(f(u))^2+(g(u))^2}\sin v,h(u)\right)$$

类似，可写出绕x轴的旋转面方程为

$$X(u,v)=\left(h(u),\sqrt{(g(u))^2+(h(u))^2}\cos v,\sqrt{(g(u))^2+(h(u))^2}\sin v\right)$$

绕y轴的旋转面方程为

$$X(u,v)=\left(\sqrt{(f(u))^2+(h(u))^2}\cos v,h(u),\sqrt{(f(u))^2+(h(u))^2}\sin v\right)$$

用参数方程表示的一些特殊曲面–旋转面

以下，我们将写出以曲线$C:\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转所得的旋转面方程。类似于上述方法，在旋转面上任取一点$M(x,y,z)$，它由曲线C上一点$M^*(x^*,y^*,z^*)$绕z轴旋转而得。因此我们有

$$x^2+y^2=(x^*)^2+(y^*)^2,\ z=z^*.$$

由于$x^*=0$, 所以$y^*=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 所要求的旋转面的方程为

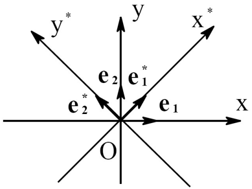
$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

类似可得其他的几种旋转面的方程。

坐标变换–平面坐标轴旋转

一、平面坐标轴旋转

如图，在一个平面内，建立直角坐标系$\{xOy\}$, 相应的正交规范标架为$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$。如果$x$轴和$y$轴绕着$O$按逆时针方向旋转$\theta$角，得到新的坐标系$\{x^*Oy^*\}$和正交规范标架$\{O;\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*}\}$。



则有如下关系式:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1^*} = \overrightarrow{e_1}\cos\theta + \overrightarrow{e_2}\sin\theta, \\ \overrightarrow{e_2^*} = -\overrightarrow{e_1}\sin\theta + \overrightarrow{e_2}\cos\theta. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

坐标变换–平面坐标轴旋转

对于平面上任一点M, 在这两个坐标系下的坐标分别为(x, y)和(x^*, y^*). 那么

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x^*\vec{e_1^*} + y^*\vec{e_2^*}. \tag{2.2.2}$$

利用(2.2.1)和(2.2.2),得到

$$\begin{aligned} x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = & \; x^*(\vec{e_1}\cos\theta + \vec{e_2}\sin\theta) + y^*(-\vec{e_1}\sin\theta + \vec{e_2}\cos\theta) \\ = & \; (x^*\cos\theta - y^*\sin\theta)\vec{e_1} + (x^*\sin\theta + y^*\cos\theta)\vec{e_2}. \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{cases} x = x^*\cos\theta - y^*\sin\theta, \\ y = x^*\sin\theta + y^*\cos\theta. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

(2.2.4)称为平面直角坐标系的坐标旋转公式。

坐标变换–平面坐标轴旋转

例1 将曲线$2xy = a^2$绕原点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$，求旋转后的新曲线的方程。

解 曲线绕原点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$，相当于保持曲线不动，将坐标轴按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$。这时旋转后的坐标系是$\{xOy\}$，而原先的坐标系是$\{x^*Oy^*\}$. 坐标变换式为

$$\begin{cases} x^* = x\cos(-\frac{\pi}{4}) - y\sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y^* = x\sin(-\frac{\pi}{4}) + y\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y). \end{cases}$$

代入方程$2x^*y^* = a^2$，有

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

这就是所求的曲线的新方程。

坐标变换–空间坐标轴旋转

二、空间坐标轴旋转

给定空间右手系直角坐标系$\{Oxyz\}$，相应的正交规范标架$\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$。如果另有空间右手系直角坐标系$\{O^*x^*y^*z^*\}$，相应的正交规范标架$\{O^*, \overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3}^*\}$, 有如下关系式

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO^*} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{e_1^*} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} + a_{13}\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{e_2^*} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{23}\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{e_3^*} = a_{31}\overrightarrow{e_1} + a_{32}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

坐标变换–空间坐标轴旋转

引入记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{if} \quad i = j, \\ 0, \text{if} \quad i \neq j. \end{cases}$$

由于

$$\overrightarrow{e_i^*} \cdot \overrightarrow{e_j^*} = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3,$$

我们有

$$(\Sigma_{k=1}^3 a_{ik} \overrightarrow{e_k}) \cdot (\Sigma_{l=1}^3 a_{jl} \overrightarrow{e_l}) = \delta_{ij}.$$

利用 $\overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{e_l} = \delta_{kl}, 1 \leq k, l \leq 3$, 可得

$$\Sigma_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2.2.12}$$

坐标变换–空间坐标轴旋转

若记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

则(2.2.12)等价于

$$AA^T=I. \qquad (2.2.12')$$

其中A^T为矩阵A的转置，I为单位矩阵。满足(2.2.12)（或(2.2.12)'）的矩阵A称为正交矩阵。易知，

$$\det A=|A|=\pm 1$$

利用

$$(\overrightarrow{e_1^*},\overrightarrow{e_2^*},\overrightarrow{e_3^*})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})=1$$

和(2.2.7), 我们可得$\det A=1$. 所以A称为行列式为1的正交矩阵。

坐标变换–空间坐标轴旋转

对于空间任意一点M，它在两个坐标系$(Oxyz)$和$(O^*x^*y^*z^*)$下的坐标分别为(x,y,z)和(x^*,y^*,z^*)，则

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3},\\
\overrightarrow{O^*M} &= x^*\overrightarrow{e_1^*} + y^*\overrightarrow{e_2^*} + z^*\overrightarrow{e_3^*},\\
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*M}.
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

利用(2.2.7), 我们有

$$
\begin{aligned}
x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} = \quad & (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})\\
& + x^*(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} + a_{13}\overrightarrow{e_3})\\
& + y^*(a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{23}\overrightarrow{e_3})\\
& + z^*(a_{31}\overrightarrow{e_1} + a_{32}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}).
\end{aligned}
$$

坐标变换–空间坐标轴旋转

由此我们可得

$$\begin{cases} x = a_1 + a_{11}x^* + a_{21}y^* + a_{31}z^*, \\ y = a_2 + a_{12}x^* + a_{22}y^* + a_{32}z^*, \\ z = a_3 + a_{13}x^* + a_{23}y^* + a_{33}z^*. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

或写成矩阵形式

$$X = X_0 + A^T X^*. \qquad (2.2.17)'$$

这就是空间直角坐标系$\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$到空间直角坐标系$\{O^*, \overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \overrightarrow{e_3^*}\}$的坐标变换公式。这里的$A$是正交矩阵。

坐标变换–空间坐标轴旋转

如果$a_{ij} = \delta_{ij}$, 即$\overrightarrow{e_1^*} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2^*} = \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3^*} = \overrightarrow{e_3}$, 有

$$x = a_1 + x^*, y = a_2 + y^*, z = a_3 + z^*. \tag{2.2.18}$$

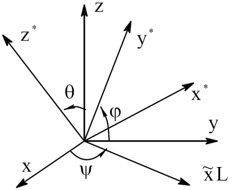
这个变换公式称为平移公式。
如果点O^*与O重合，则公式（2.2.17）变为

$$\begin{cases} x = a_{11}x^* + a_{21}y^* + a_{31}z^*, \\ y = a_{12}x^* + a_{22}y^* + a_{32}z^*, \\ z = a_{13}x^* + a_{23}y^* + a_{33}z^*. \end{cases} \quad X = A^T X^* \tag{2.2.19}$$

坐标变换–Euler角

三、Euler角

在上面的坐标变换公式中，变换矩阵A中9个系数，由(2.2.12)中的6个独立方程，可知，这9个系数实际上由3个独立变量决定。下面我们用角度来代替a_{ij}. 如图，设平面xy与平面x^*y^*(有公共点O)的交线是L.



第一步 保持z轴不动，将x轴绕z轴旋转到直线L的位置。这是y轴也相应旋转，得到过渡性的直角坐标系$O\tilde{x}\tilde{y}z$. $\tilde{x}$轴与直线L重合。设x轴绕z轴按逆时针转ψ角，则有坐标变换公式

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\psi - \tilde{y}\sin\psi, \\ y = \tilde{x}\sin\psi + \tilde{y}\cos\psi. \end{cases} \tag{2.2.20}$$

坐标变换–Euler角

第二步 保持$\tilde{x}$轴不动。将z轴绕$\tilde{x}$轴按逆时针旋转θ角到z^*轴，从而$\tilde{y}$轴相应地转到$\bar{y}$轴。建立过渡性直角坐标系$O\tilde{x}\bar{y}z^*$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} \tilde{y} = \bar{y}\cos\theta - z^*\sin\theta, \\ z = \bar{y}\sin\theta + z^*\cos\theta. \end{cases} \tag{2.2.21}$$

坐标变换–Euler角

第三步 保持z^*轴不动。将$\tilde{x}$轴绕z^*轴按逆时针旋转ϕ角到x^*轴，从而$\bar{y}$轴相应地转到y^*轴。建立直角坐标系$Ox^*y^*z^*$，坐标变换公式为

$$\begin{cases} \tilde{x} = x^* \cos\phi - y^* \sin\phi, \\ \bar{y} = x^* \sin\phi + y^* \cos\phi. \end{cases} \tag{2.2.22}$$

坐标变换–Euler角

利用(2.2.20), (2.2.21)以及(2.2.22),我们可以将直角坐标系$Oxyz$变换到直角坐标系$Ox^*y^*z^*$. 其变换公式为

$$X = A^T X^*,$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2.26}$$

坐标变换–Euler角

以及

$$a_{11}=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi, a_{21}=-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi$$
$$a_{13}=\sin\theta\sin\psi, a_{12}=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\theta\cos\psi$$
$$a_{22}=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\theta\cos\psi, a_{32}=-\sin\theta\cos\psi$$
$$a_{13}=\sin\varphi\sin\theta, a_{23}=\cos\varphi\sin\theta, a_{33}=\cos\theta.$$

并且还满足

$$\Sigma_{k=1}^{3}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}.$$

这就说明A是一个正交矩阵。上面3个角ψ,θ,ϕ称为Euler角。