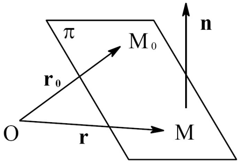
二、直线与平面

盛为民

过空间一点M_0并且垂直于一条直线L的平面π是唯一确定的，任何垂直于平面的直线称为该平面的法线。与该发现平行的任一非零向量，称为平面π的法向量。



在一个空间直角坐标系$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$中，已知一个平面$\pi$过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\overrightarrow{n}=\{A,B,C\}$为平面的一个非零法向量。如图，在平面上任取一点$M$，其坐标为$M(x,y,z)$，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{r}=(x,y,z)$. 向量$\overrightarrow{M_0M}$与向量$\overrightarrow{n}$垂直。于是有

$$\overrightarrow{n}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0})=0. \qquad (1.2.1)$$

由(1.2.1)得:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{1.2.2}$$

即

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1.2.3}$$

其中$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. 方程(1.2.3)称为平面π的方程。反之，我们可以证明任何形如(1.2.3)的方程，都表示一个平面:由于A,B,C不全为零，不妨设$A\neq 0$，方程(1.2.3)可以改写为

$$A(x+\frac{D}{A})+By+Cz=0. \tag{1.2.4}$$

记坐标为$(-\frac{D}{A},0,0)$的点为M_0. 又记$\overrightarrow{n}=(A,B,C)$, 从方程(1.2.4)可以看出

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

这表明点$M(x,y,z)$在过点M_0, 且以$\overrightarrow{n}$为法向量的平面π内。得证。

平面还可以由一点M_0和两个不共线向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$决定，这样的平面$\pi$过点$M_0$且与$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$平行。这时$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$称为平面$\pi$的定位向量。

设$M(\overrightarrow{r})$为平面π上的任意一点，则$\overrightarrow{M_0M}$与向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$共面，所以

$$\overrightarrow{M_0M} = u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}, \tag{a-1}$$

其中u, v为参数。方程$(a-1)$是平面π的矢量式方程。

相应的坐标式参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + uX_1 + vX_2 \\ y &= y_0 + uY_1 + vY_2 \\ z &= z_0 + uZ_1 + vZ_2 \end{aligned} \tag{a-2}$$

其中$\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$. $(a-2)$称为平面π的坐标式参数方程。
在$(a-1), (a-2)$中分别消去参数u, v, 可得平面的方程分别为

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \tag{a-3}$$

或

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{a-4}$$

方程$(a-4)$可以化为形如$Ax + by + Cz + D = 0$（即(1.2.3)）的形式。反之(1.2.3)式也可以改写成形如$(a-4)$的方程，从而表示平面。

例题1 已知一平面通过3点$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$，并且$abc\neq 0$，求它的方程。
答案:
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1.2.9}$$
截距式方程。

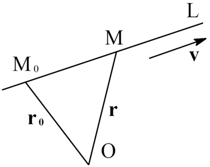
例题2 已知空间三点$M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$不共线。求过这三点的平面方程。
解：法向可取
$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}.$$
由此得
$$(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$$
普通方程为
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1.2.10)$$

例题2 已知平面π的方程是$Ax+By+Cz+D=0$. 两点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$不在平面$\pi$上。已知连接$M_1$和$M_2$的直线$L$交平面$\pi$于点$M$. 求实数$k$的值，使得$\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$.

解：第一步，利用$\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$，将$M$点的坐标用点$M_1$和$M_2$的坐标和$k$表示出来。

第二步，将M点的坐标代入π的方程，由此求出$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}$.

过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$可以作唯一一条直线L平行于非零向量$\mathbf{v} = (l, m, n)$.



如图，设点$M(x, y, z)$是直线L上任意一点，则有

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{v}, \tag{1.2.13}$$

其中t是实数。$\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = (x, y, z)$. 由(1.2.13)式，可以得到

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v}. \tag{1.2.14}$$

（向量形式的直线方程）

直线方程的坐标方程为

$$x = x_0 + tl, y = y_0 + tm, z = z_0 + tn, \tag{1.2.15}$$

(参数方程)
上式还可化为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{1.2.16}$$

（直线L的点向式（对称式）方程）

方程（1.2.16）可以改写成形如

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = 0 \end{cases} \tag{1.2.17}$$

这里，非零向量(A_1, B_1, C_1)和(A_2, B_2, C_2)不平行。这相当于将这条直线看成是两个平面的交线。反过来，从方程（1.2.17）,也可以得到形如（1.2.16）的方程。方程(1.2.17)称为直线的普通方程。

例题1 已知一条直线通过两个定点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求这条直线的参数方程和点向式方程。

答案： 参数方程为

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1), z = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

直线的点向式方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

例题2 求过点$(1,0,-2)$, 与平面$3x-y+2z+2=0$平行，且与直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$相交的直线方程。

解：可以由两种方法，课本上是其中一种。另一种方法：先求出过点$(1,0,-2)$且平行与已知平面的平面，记为π_1. 再求出过已知直线和$(1,0,-2)$的平面，记为π_2. 则π_1,π_2的交线就是所要求的直线。

例题3 求过点$(11,9,0)$与直线$l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$和直线$l_2: \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$都相交的直线方程。

解: 同样可以由两种方法，课本上是其中一种。另一种方法是分别求出过点$(11,9,0)$和两直线的两个平面，这两个平面的交线就是所要求的。

思考题 求与下列三条直线同时相交的直线所构成的曲面

$$\begin{cases} x=1, \\ z=y, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=-z, \end{cases} \quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}.$$

两条空间直线的位置关系有3种：平行（包括重合）、相交或异面。如何判断？

设两直线分别为

$$\begin{aligned} L_1 &: \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + t\overrightarrow{v}, \\ L_2 &: \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0^* + t^*\overrightarrow{v}^*, \end{aligned}$$

that is

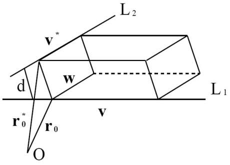
$$\begin{aligned} L_1 &: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(l, m, n)\,, \\ L_2 &: (x, y, z) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*) + t^*\,(l^*, m^*, n^*)\,. \end{aligned}$$

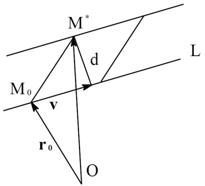
判断 直线L_1平行于直线$L_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{v^*}$.
如果同时又有$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{r^*} - \overrightarrow{r} \parallel \overrightarrow{v}$, 则$L_1$与$L_2$重合。

判断(续) 如果$\overrightarrow{v}$与$\overrightarrow{v^*}$不平行，则直线L_1不平行于直线L_2。
如果还有$\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v^*}, \overrightarrow{w}\right) = 0$, 则直线$L_1$与$L_2$共面，那么直线$L_1$与$L_2$必相交。如果$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}^*, \overrightarrow{w}) \neq 0$, 则直线$L_1$与$L_2$为两条异面直线。

现在先求两条平行直线间的距离:
假设两直线L_1与L_2平行，点M_0和M_0^*分别为这两条直线上的两点，如图，两直线L_1与L_2间的距离相当于点M_0^*到直线L_1的距离。因此这个距离可由如下公式计算

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0 M_0^*} \times \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}.$$





两异面直线间的距离 两异面直线L_1与L_2间的距离相当于向量$\overrightarrow{M_0M_0^*}$在公垂线上的投影的绝对值，或者可看成以$\vec{v},\vec{v}^*,\vec{w}$张成的平行六面体的一条高的长，这条高垂直于以$\vec{v},\vec{v}^*$张成的底面，因而有

$$d=\frac{\left|\left(\vec{v},\vec{v}^*,\vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}\times\vec{v}^*\right|}.$$

两异面直线的公垂线 两异面直线的公垂线可以看成公垂线与两异面直线分别张成的两平面π_1和π_2的交线，如图。

例1 判断如下两直线的位置，若平行，求它们之间的距离；若异面，求距离和公垂线方程。

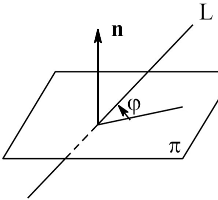
$$L_1 : x-2=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1},$$
$$L_2 : \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-2}.$$

解 两直线是异面直线，其余略。

直线与平面的相互关系 有两种：直线平行于平面（包括直线在平面上），或直线与平面相交于一点。**如何判断？**

设直线$L: \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v}$, 平面$\pi: \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0^*}) = 0.$
当$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, 直线$L$与平面$\pi$平行。如果还有$(\overrightarrow{r_0^*} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$, 则这条直线在平面上。
如果$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$, 则这条直线与平面相交。如果$\overrightarrow{n} \parallel \overrightarrow{v}$, 则直线与平面垂直。

如果直线L与平面π相交，如图，记它们的夹角为ϕ $(0 \le \phi \le \frac{\pi}{2})$.
从向量内积的定义，



$$\cos\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}\right) = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \left|\overrightarrow{v}\right|}$$

这里$\angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}) \in [0, \pi]$, 则

$$\phi = \|\frac{\pi}{2} - \angle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v})\|.$$

例1 如果一条直线与3张坐标平面的交角分别为α, β, γ,
求$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$的值。

注意 如果直线与3条坐标轴的交角的余弦分别为l, m, n, 这三个数称为直线L所在方向的方向余弦。并且有

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

利用这个结论就可算出

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \cdots = 1.$$

两平面的位置关系有两种：平行（包括重合），相交。
设平面π_1的方程为：$\overrightarrow{n_1}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_1})=0$, 平面$\pi_2$的方程为：$\overrightarrow{n_2}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_2})=0$。

判断 (1) 当$\overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}$时，平面$\pi_1$与$\pi_2$平行。如果同时还有$\overrightarrow{n_1}\cdot(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1})=0$, 则平面$\pi_1$与$\pi_2$重合。
(2) 如果$\overrightarrow{n_1}$不平行于$\overrightarrow{n_2}$, 则平面π_1与π_2必相交。如果又有$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，则两平面垂直。

设两平面的夹角为ϕ $(0 \le \phi \le \frac{\pi}{2})$，则

$$\varphi = \begin{cases} \angle\left(\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2\right), \text{ if } \angle\left(\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \pi - \angle\left(\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2\right), \text{ if } \angle\left(\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

而

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2\right) = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{\left|\overrightarrow{n}_1\right| \left|\overrightarrow{n}_2\right|}$$

特别当$\varphi = 0$时，两平面平行。对于是否重合，还要观察。

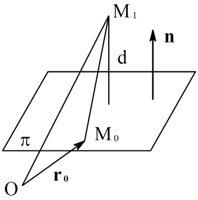
如果两平面的方程为：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则两平面重合

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

如果平面π_1与π_2平行，要求两平行平面间的距离。可以在其中一个平面上任意取定一点（例如π_2上一点$M_0(\vec{r_0})$），求该点到另一平面（例如π_2）的距离。（如图）

设平面π方程为$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})=0$，这里$\vec{n}=(A,B,C), \vec{r}=(x,y,z), \vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$，

即$Ax+By+Cz+D=0$，其中$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. 空间一点$M_1=(x_1,y_1,z_1), \overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$.



点M_1到平面π的距离即为向量$\overrightarrow{M_0M_1}$在向量$\overrightarrow{n}$上的投影的绝对值，即

$$d=\left|\pi_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}&=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)\\&=Ax_1+By_1+Cz_1+D,\end{aligned}$$

则

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 求平面$Ax+By+Cz+D=0$与$Ax+By+Cz+D_1=0$之间的距离。

答案

$$d=\frac{D-D_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

直线L的普通方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

给定一对不全为零的实数λ, μ, 方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (1.2.51)$$

表示一张通过直线L的平面。当不全为零的实数对λ, μ变化时，方程表示一族过直线L的平面。这族平面称为通过L的平面束方程。

另一方面，对于过直线L的任一平面，都可以找到适当的λ, μ，使得平面方程表示为(1.2.51)的形式。事实上，取平面π上不在直线L上的一点$P(x_1, y_1, z_1)$. 由于P不在L上，所以$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1$和$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2$不全为零。因而可取定一组

$$\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2), \mu = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1$$

使得π可写成(1.2.51)的形式。

利用平面束方程，可以非常有效地解决与直线、平面有关的问题。

例1 求经过平面$x+5y+z=0$和$x-z+2=0$的交线，且与平面$x-4y-8z+12=0$成$\frac{\pi}{4}$角的平面方程。

答案 所求的平面方程为:

$$x-z+2=0,$$

和

$$x+20y+7z-6=0.$$

例2 已知直线L在平面π上。L的方程为

$$\begin{cases} 3x+2y-z+1=0, \\ x-2z=0 \end{cases}$$

π的方程为$4x+ay+2+b=0$，求a, b.
解：一种方法是利用平面束，另一种方法是利用直线在平面上的判断。可解出：$a=4, b=2$.

例3 设直线L_1的方程为

$$\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ y+z=0 \end{cases}$$

直线L_2过点$M(0,0,-1)$, 平行于向量$\vec{u}(2,1,-2)$. 平面π的方程为

$$x+y+z=0.$$

求由全体于L_1, L_2都相交，且平行于π的直线所构成的曲面S的方程。

解: （方法一）参数法：构成S的每一条直线都平行于平面π, 从而在一张平行于π的平面

$$\pi_t : x+y+z=t$$

上，记该直线为L_t.

求出π_t和L_2的交点M_t的坐标$(2t+2, t+1, -2t-3)$, 用平面束方法求出M_t与直线L_1所决定的平面方程:

$$(t+2)x-(2t+5)y-z-t-2=0.$$

于是L_t的一般方程为

$$\begin{cases} x+y+z=t, \\ (t+2)x-(2t+5)y-z-t-2=0 \end{cases}$$

消去参数t, 得到S的方程为

$$x^2-2y^2-xy+xz-2yz+x-6y-2z-2=0.$$

(方法二)轨迹法：分析S上点的几何特性，并把它转化为点的坐标所要满足的方程，即可得到S的一般方程。
不难看出，直线L_1, L_2上的点都在S上。设点$P(r, s, t)$不在L_1, L_2上，则由P和直线L_1, L_2各决定一张平面，分别记为π_1, π_2，它们的交线记为$l(P)$. 于是

$$P \in S \Longleftrightarrow l(P) \parallel \pi.$$

用平面束的方法可求出π_1的方程为

$$(s+t)x + (-r-2t+1)y + (-r+2s+1)z - s - t = 0.$$

π_2的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ r & s & t+1 \end{vmatrix} = 0,$$

i. e.

$$(2s+t+1)\,x - 2\,(r+t+1)\,y + (-r+2s)\,z - r + 2s = 0$$

由$l(P) \parallel \pi$知

$$\begin{vmatrix} s+t & -r-2t+1 & -r+2s+1 \\ 2s+t+1 & -2(r+t+1) & -r+2s \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$r^2 - 2s^2 - rs + rt - 2st + r - 6s - 2t - 2 = 0$$

思考题 设直线L_1, L_2的方程为

$$L_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0, \end{cases}$$

(1) 证明:

$$L_1 \parallel L_2 \quad \text{if and only if} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 证明：如果L_1和L_2异面，则

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

(3)证明：L_1和L_2共面，其充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$