一、向量代数

盛为民

目的和要求

- 目的：《几何学》是一门培养数学研究与应用、工程技术与多媒体动画制作等方面的专门人才的基础课程。着重培养学生的几何直观和分析洞察问题的能力，提高几何素养，以及严格的逻辑推理能力和计算能力。

目的和要求

- 目的：《几何学》是一门培养数学研究与应用、工程技术与多媒体动画制作等方面的专门人才的基础课程。着重培养学生的几何直观和分析洞察问题的能力，提高几何素养，以及严格的逻辑推理能力和计算能力。
- 要求：通过学习欧氏几何、仿射几何和射影几何，学生能够针对具体的几何问题，选择合理的几何学理论，利用坐标法和向量代数的方法，进行研究。同时也要求学生掌握必要的代数方法和计算技巧，能进行准确地计算。

向量的基本概念

- 向量（矢量）、标量（数量）【复数是数量吗？】

向量的基本概念

- 向量（矢量）、标量（数量）【复数是数量吗？】
- 向量的相等，自由向量

向量的基本概念

- 向量（矢量）、标量（数量）【复数是数量吗？】
- 向量的相等，自由向量
- 向量的表示－有向线段

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} = \mathbf{a},$$

向量$\mathbf{a}$的长度（也称为模长）$:= |\mathbf{a}|$.

向量的基本概念

- 向量（矢量）、标量（数量）【复数是数量吗？】
- 向量的相等，自由向量
- 向量的表示 - 有向线段

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} = \mathbf{a},$$

向量$\mathbf{a}$的长度（也称为模长）$:= |\mathbf{a}|$.

- 零向量$\mathbf{0} = \overrightarrow{0}$和一个向量$\mathbf{a}$的反（负）向量$-\mathbf{a}$

向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。

向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;
- 结合律$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$;

向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;
- 结合律$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$;
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$;

向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$;
- 结合律$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$;
- $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$;
- $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$;

向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$;
- 结合律$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$;
- $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$;
- $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$;

向量的基本概念

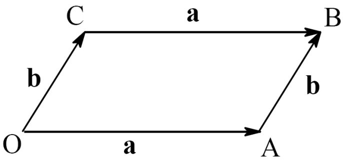
向量的加法运算及其运算律:

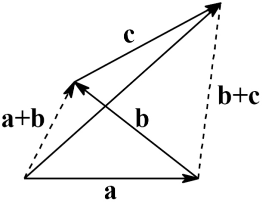
- 设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$;
- 结合律$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$;
- $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$;
- $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$;
- 三角形法则: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.

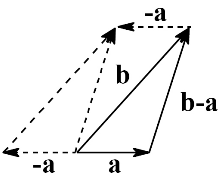
向量的基本概念

向量的加法运算及其运算律:

- 设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$, 则向量$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ (满足三角形法则或平行四边形法则)。
- 交换律$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$;
- 结合律$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$;
- $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$;
- $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$;
- 三角形法则: $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.
- 向量的加法与减法的基本运算法则，与实数的加、减法完全一样。


C
a
B
b
b
O
a
A


c
a+b
b
b+c
a


-a
b
b-a
-a
a

实数乘向量

实数乘向量的定义:

- 实数λ乘向量$\overrightarrow{a}$得到一个向量$\lambda\overrightarrow{a}$, 其长度$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$; 其方向: 当$\lambda > 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相同; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相反。

实数乘向量

实数乘向量的定义:

- 实数λ乘向量$\vec{a}$得到一个向量$\lambda\vec{a}$, 其长度$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$; 其方向: 当$\lambda > 0$时, $\lambda\vec{a}$的方向与$\vec{a}$相同; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\vec{a}$的方向与$\vec{a}$相反。
- 实数乘向量有以下性质:

实数乘向量

实数乘向量的定义:

- 实数λ乘向量$\overrightarrow{a}$得到一个向量$\lambda\overrightarrow{a}$, 其长度$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$; 其方向: 当$\lambda > 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相同; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相反。
- 实数乘向量有以下性质:
- (1) 结合律$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;

实数乘向量

实数乘向量的定义:

- 实数λ乘向量$\overrightarrow{a}$得到一个向量$\lambda\overrightarrow{a}$, 其长度$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$; 其方向: 当$\lambda > 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相同; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相反。
- 实数乘向量有以下性质:
- (1) 结合律$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;
- (2) 第一分配律$(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$;

实数乘向量

实数乘向量的定义:

- 实数λ乘向量$\overrightarrow{a}$得到一个向量$\lambda\overrightarrow{a}$, 其长度$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$; 其方向: 当$\lambda > 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相同; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相反。
- 实数乘向量有以下性质:
- (1) 结合律$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;
- (2) 第一分配律$(\lambda+\mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$;
- (3) 第二分配律$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$.

实数乘向量

实数乘向量的定义:

- 实数λ乘向量$\overrightarrow{a}$得到一个向量$\lambda\overrightarrow{a}$, 其长度$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$; 其方向: 当$\lambda > 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相同; 当$\lambda < 0$时, $\lambda\overrightarrow{a}$的方向与$\overrightarrow{a}$相反。
- 实数乘向量有以下性质:
- (1) 结合律$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;
- (2) 第一分配律$(\lambda+\mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$;
- (3) 第二分配律$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$.
- 这里λ, μ是任意实数, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 是任意向量。(请学生证明?)

实数乘向量

- 长度为1的向量称为单位向量。对于任一非零向量$\vec{a}$, 定义$\vec{a}$的单位向量为$\vec{a}/|\vec{a}|$.

实数乘向量

- 长度为1的向量称为单位向量。对于任一非零向量$\overrightarrow{a}$, 定义$\overrightarrow{a}$的单位向量为$\overrightarrow{a}/|\overrightarrow{a}|$.
- 共线向量、共面向量的定义。$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$ 共线 = $\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$平行: $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$. 零向量与任何向量都共线。

实数乘向量

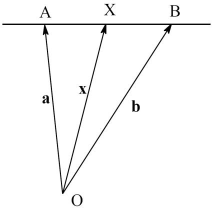
- 长度为1的向量称为单位向量。对于任一非零向量$\overrightarrow{a}$, 定义$\overrightarrow{a}$的单位向量为$\overrightarrow{a}/|\overrightarrow{a}|$.
- 共线向量、共面向量的定义。$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$ 共线 = $\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$平行: $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$. 零向量与任何向量都共线。
- 若$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{a}$, 则存在实数$\lambda = |\overrightarrow{b}|/|\overrightarrow{a}|$, 满足$\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.

实数乘向量

- 长度为1的向量称为单位向量。对于任一非零向量$\vec{a}$, 定义$\vec{a}$的单位向量为$\vec{a}/|\vec{a}|$.
- 共线向量、共面向量的定义。$\vec{a}$与$\vec{b}$ 共线 = $\vec{a}$与$\vec{b}$平行: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. 零向量与任何向量都共线。
- 若$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \parallel \vec{a}$, 则存在实数$\lambda = |\vec{b}|/|\vec{a}|$, 满足$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.
- 两个非零的向量$\vec{b}$和$\vec{a}$共线$\Longleftrightarrow$ 存在两个非零实数λ和μ, 使得
$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}.$$

共线共面向量的性质

任意选定平面或空间一点O作为公共起点，将终点在A, B, $\cdots$, X等的向量分别记为$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\cdots$, $\overrightarrow{x}$等。

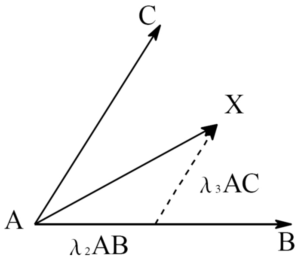


定理1 (1)设A, B为不同两点，则点X在直线AB上的充要条件是：存在唯一一对实数λ_1, λ_2，使得

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad (1.1.4)$$

这里向量的公共起点不在直线AB上。特别地，点X落在线段AB上的充要条件是：存在唯一一对非负实数λ_1, λ_2，使得(1.1.4)成立。

共线共面向量的性质



(2) 设A, B, C为不在同一直线上的三点，则点X在A, B, C 所决定的平面π上$\Longleftrightarrow$ 存在唯一一组实数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \tag{1.1.5}$$

这里向量的公共起点不在平面π上。特别地，点X落在ΔABC内的充要条件是：存在唯一一组非负实数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得(1.1.5)成立。

共线共面向量的性质

(3) 设A, B, C, D为不在同一平面上的4点，则点X在四面体$ABCD$内$\Longleftrightarrow$
存在唯一一组非负实数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使得

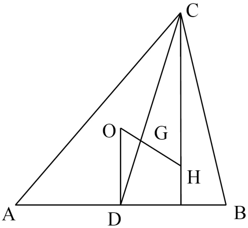
$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c} + \lambda_4 \overrightarrow{d}, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1. \quad (1.1.6)$$

注： 在（3）中，可以证明对于空间任一点X, 存在唯一一组实数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使得

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c} + \lambda_4 \overrightarrow{d}.$$

(谁能证明？)

例题



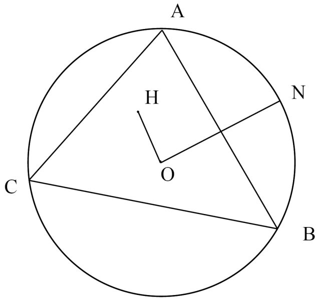
例1 (1) 在ΔABC中，O是外心，G是重心，H是垂心，求证:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC});\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

注：在第一个等式中，O可以改为空间任意一点，等式仍然成立。（请证明？）

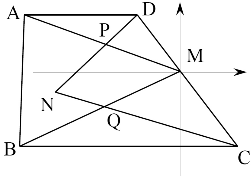
证明 要点一：对于第一个等式，如果O是外心，可以利用平面几何的结论$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. 要点二：利用平面几何的知识，可得$G$在线段$OH$上，并且$OG=\frac{1}{2}GH$. 这一点可以利用平面几何的知识（相似三角形、正弦定理等）进行证明。

例题



例1 (2) ΔABC是一个锐角三角形，H为垂心，弦AB分ΔABC的外接圆圆周为1:2的两段圆弧，点N是小圆弧$\overset{\frown}{AB}$的中点。求证：$CN \perp OH$.

例题



例2 $ABCD$是平面内一个凸四边形，BC平行于AD. M是CD的中点，P是MA的中点，Q是MB的中点。直线DP和CQ交于点N.

求证：点N不在ΔABM 的外部的充要条件是$\frac{1}{3} \leq \frac{AD}{BC} \leq 3$.

证明： (1) 建立直角坐标系，将主要点的坐标表示出来。

(2) 利用矢量方法将$\overrightarrow{MN}$表示为$\overrightarrow{MA}$和$\overrightarrow{MB}$的组合$\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{MB} + \mu\overrightarrow{MA}$, 再求出$\lambda, \mu$.

(3) 将λ, μ表示成AD, BC的表达式，利用定理1（2）作出判断。

Homework

Homework: Page 33, 1, 2.

Thank you

向量的内积

定义：两个非零向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$的夹角$\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$: 将这两个向量的起点移到同一点O, 向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$所在的直线有两个夹角，一个在$[0, \pi]$内，另一个在$(\pi, 2\pi]$内。我们规定这两个向量的夹角$\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$是在$[0, \pi]$内的一个。由此知:

$$\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}).$$

向量的内积

- **例：** 力$\overrightarrow{F}$作用在一个物体上，使之作了位移$\overrightarrow{S}$. 由此所作的功为$W = |\overrightarrow{F}||\overrightarrow{S}|cos\angle(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{S}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S}$.

向量的内积

- **例:** 力$\overrightarrow{F}$作用在一个物体上，使之作了位移$\overrightarrow{S}$. 由此所作的功为$W = |\overrightarrow{F}||\overrightarrow{S}|cos\angle(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{S}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S}$.
- 定义：一个点P在一条直线上的投影,是一个点P'。向量$\overrightarrow{AB}$在一条直线（方向为$\overrightarrow{l}$）上的投影向量也是一个向量$\overrightarrow{A'B'}$，它是由点A, B在直线上的投影A', B'得到的。请注意：**定义下面的数**

$$|\overrightarrow{AB}|cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{l})$$

为向量$\overrightarrow{AB}$在直线l(方向$\overrightarrow{l} \neq \overrightarrow{0}$)上的投影，记为$\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{AB}$. 向量$\overrightarrow{AB}$在一条直线（方向为$\overrightarrow{l}$）上的投影向量$= (\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{AB})\overrightarrow{l}/|\overrightarrow{l}|$.

向量的内积

一个向量在另一个方向上的投影的性质:

- $$\pi_{\overrightarrow{l}}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{a}+\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{b}$$

向量的内积

一个向量在另一个方向上的投影的性质:

- $$\pi_{\overrightarrow{l}}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{a}+\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{b}$$
- $$\pi_{\overrightarrow{l}}(\lambda\overrightarrow{a})=\lambda\pi_{\overrightarrow{l}}\overrightarrow{a}$$

向量的内积

两个向量内积的定义： 对于两个非零向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$，它们的内积定义为

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b});$$

当$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$中有一个是零向量时，定义他们的内积为0.

内积是一个实数，因此内积也称为数量积。内积有如下性质：

- (1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

向量的内积

两个向量内积的定义： 对于两个非零向量$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$，它们的内积定义为

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b});$$

当$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$中有一个是零向量时，定义他们的内积为0.

内积是一个实数，因此内积也称为数量积。内积有如下性质：

- (1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
- (2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ 有3种可能：$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$，或$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$，或$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$垂直；

向量的内积

两个向量内积的定义： 对于两个非零向量$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, 它们的内积定义为

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b});$$

当$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$中有一个是零向量时，定义他们的内积为0.

内积是一个实数，因此内积也称为数量积。内积有如下性质：

- (1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
- (2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ 有3种可能：$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, 或$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, 或$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$垂直；
- (3) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$;

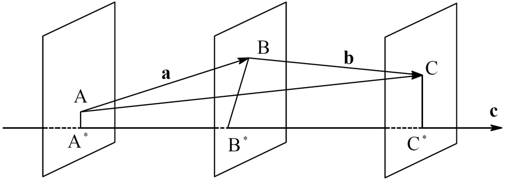
向量的内积

- $(4)(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(\lambda\overrightarrow{b})$, 这里$\lambda$为一个任意实数。

向量的内积

- (4)$(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(\lambda\overrightarrow{b})$, 这里$\lambda$为一个任意实数。
- (5) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$; 由此可知

$$(\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\lambda(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})+\mu(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}).$$



- (6) Schwarz不等式

$$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|.$$

等号当且仅当$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$时成立。

向量的内积

- **例题3** 在ΔABC中，$\angle A$不是直角，O是ΔABC的外心，H是ΔABC的垂心。问：ΔABC满足什么条件时，才能使$AH = OA$?

向量的内积

- **例题3** 在ΔABC中，$\angle A$不是直角，O是ΔABC的外心，H是ΔABC的垂心。问：ΔABC满足什么条件时，才能使$AH = OA$?
- 解：利用例1的结论

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

向量的内积

- **例题3** 在ΔABC中，$\angle A$不是直角，O是ΔABC的外心，H是ΔABC的垂心。问：ΔABC满足什么条件时，才能使$AH = OA$?
- 解：利用例1的结论

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

- **例题4** 在ΔABC内任取一点O，分别连接$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$，又$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$分别是它们的单位向量。求证：向量$\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$的长度小于1。

向量的外积

两个向量的外积: 两个非零向量$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的外积$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$是一个向量，其长度$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$, 其方向正交于$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$, 并且$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$构成右手系。当$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$中有一个是零向量时，定义$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$.

- $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$等于以$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$为邻边的平行四边形的面积。

向量的外积

两个向量的外积: 两个非零向量$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的外积$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$是一个向量，其长度$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$, 其方向正交于$\overrightarrow{a}$和$\overrightarrow{b}$, 并且$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$构成右手系。当$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$中有一个是零向量时，定义$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$.

- $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$等于以$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$为邻边的平行四边形的面积。
- $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$是一个向量，外积又称为向量积。

向量的外积

向量的外积的性质:

- (1) 反称性: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$;

向量的外积

向量的外积的性质:

- (1) 反称性: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$;
- (2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$有3种可能: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$或$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, 或者$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$都不是零向量, 但$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, 特别有$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;

向量的外积

向量的外积的性质:

- (1) 反称性: $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$;
- (2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$有3种可能: $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$或$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$, 或者$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$都不是零向量，但$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$, 特别有$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$;
- (3) $(\lambda\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}=\lambda(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}\times(\lambda\overrightarrow{b})$, 这里$\lambda$是一个任意实数;

向量的外积

向量的外积的性质:

- (1) 反称性: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$;
- (2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$有3种可能: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$或$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, 或者$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$都不是零向量, 但$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, 特别有$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;
- (3) $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times (\lambda\overrightarrow{b})$, 这里$\lambda$是一个任意实数;
- (4) $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2$;

向量的外积

向量的外积的性质:

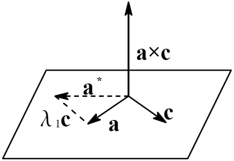
- (1) 反称性: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
- (2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$有3种可能: $\vec{a}=\vec{0}$或$\vec{b}=\vec{0}$, 或者$\vec{a}$, $\vec{b}$都不是零向量, 但$\vec{a}\parallel\vec{b}$, 特别有$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;
- (3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$, 这里$\lambda$是一个任意实数;
- (4) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$;
- (5) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

向量的外积

性质(5)的证明 当三个向量中有一个是零向量时，等式显然成立。现在假设这三个向量都不是零向量。并且假定$\vec{c}$是单位向量，否则利用性质(3),就可以得到。由于$\vec{a}\times\vec{c}$与$\vec{a},\vec{c}$都垂直，在由$\vec{a},\vec{c}$决定的平面内，$\vec{a}$可以正交分解为

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{c}+\vec{a^*}.$$

这样(利用外积的定义，作图，可看出)



$$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a^*}\times\vec{c}.$$

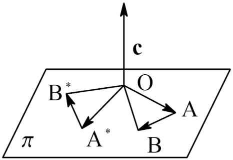
同理，在由$\vec{b},\vec{c}$决定的平面内，$\vec{b}$可以正交分解为

$$\vec{b}=\lambda_2\vec{c}+\vec{b^*}.$$

且

$$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b^*}\times\vec{c}$$

向量的外积



性质(5)的证明续 以及

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} &= [(\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{c} + (\overrightarrow{a^*} + \overrightarrow{b^*})] \times \overrightarrow{c} \\
&= (\overrightarrow{a^*} + \overrightarrow{b^*}) \times \overrightarrow{c}.
\end{aligned}
$$

下面我们只要证明

$$
(\overrightarrow{a^*} + \overrightarrow{b^*}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a^*} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b^*} \times \overrightarrow{c}. \quad (1.1.67)
$$

其中 $\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b^*}$ 都与 $\overrightarrow{c}$ 垂直，并且 $\overrightarrow{c}$ 是单位向量。以下略。

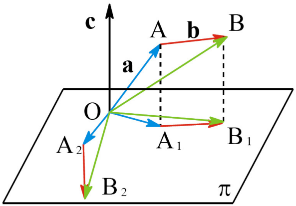
向量的外积

性质(5)的证明（注） 上面的证明并不是最好的。我们采用吕林根《解析几何》的证法。我们只证

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

其中$\vec{c}$是单位向量。
通过向量$\vec{a}$与$\vec{c}$的公共起点O作平面π垂直于$\vec{c}$，自矢量$\vec{a}$的终点A引$AA_1\perp\pi$, A_1为垂足，由此的$\vec{a}$在π上的射影矢量$\overrightarrow{OA_1}$, 再将$\overrightarrow{OA_1}$在平面π上绕O依顺时针旋转90^0, 得到$\overrightarrow{OA_2}$，那么$\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}\times\vec{c}$.

向量的外积



性质(5)的证明（注） 如图设$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$, 那么$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. 并设$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$分别为$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$在平面π上的投影矢量。再将$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$在平面π内分别绕O依顺时针旋转90^0得到$\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{OB_2}$。

向量的外积

性质(5)的证明（注）

依上述作图法可知

$$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a} \times \vec{c}, \overrightarrow{A_2B_2} = \vec{b} \times \vec{c}, \overrightarrow{OB_2} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$$

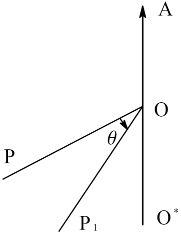
而

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_2}$$

所以

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

向量的外积



例题 P15 例6 （1）已知单位向量$\overrightarrow{e}$垂直于非零向量$\overrightarrow{r}$，将$\overrightarrow{r}$绕$\overrightarrow{e}$逆时针旋转角度θ得到向量$\overrightarrow{r_1}$, 用$\overrightarrow{e}$，$\overrightarrow{r}$和θ表示$\overrightarrow{r_1}$.

（2）如图，给定不共线3点O, P, A, 将点P绕向量$\overrightarrow{OA}$按逆时针旋转角度θ得到点P_1, 用$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$和θ表示$\overrightarrow{OP_1}$.

直角坐标系

直角坐标系的建立 在空间任意取定一点O作为原点，以O为起点，作3个互相垂直的单位向量$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$，使得$\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$. 以$\vec{e_1}$方向为$x$轴正方向，$\vec{e_2}$方向为$y$轴正方向，$\vec{e_3}$方向为$z$轴正方向，建立直角坐标系。则对于空间任意一点$P$，有唯一的分解式

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}. \tag{1.1.80}$$

称(x_1, x_2, x_3)为点P关于坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$的坐标，也称$(x_1, x_2, x_3)$为向量$\overrightarrow{OP}$的坐标或分量。简记为

$$\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3). \tag{1.1.81}$$

(1.1.80)与(1.1.81)实质上是同一个公式。

直角坐标系

在直角坐标系下，向量的运算 设向量$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$, λ为一个实数，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}&=(a_1,a_2,a_3)\pm(b_1,b_2,b_3)\\&=\cdots\\&=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3).\end{aligned}$$

$$\lambda\overrightarrow{a}=\lambda(a_1,a_2,a_3)=\cdots=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

利用

$$\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j,\end{cases}$$

有

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=\cdots=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

在直角坐标系下，向量的运算(续)

特别地，有

$$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

即

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

如果$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$都不是零向量，利用内积，可以计算出两向量的夹角

$$\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

在直角坐标系下，向量的运算(续)

如果非零向量$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$的夹角分别为$\alpha,\beta,\gamma$，利用$\overrightarrow{e_1}=(1,0,0),\overrightarrow{e_2}=(0,1,0),\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$，可知

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e_1}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e_1}|}=a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$
$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e_2}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e_2}|}=a_2/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$
$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e_3}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e_3}|}=a_3/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是$\overrightarrow{a}$的单位矢量$\overrightarrow{a}/|\overrightarrow{a}|$.
$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为$\overrightarrow{a}$的方向余弦，它们满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

在直角坐标系下，向量的运算(续)

利用

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}, \vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}, \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2},$$

有

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\ &= \cdots \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).\end{aligned}$$

我们记

$$\vec{a} \times \vec{b} \triangleq \left(\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ b_1, & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

混合积的定义

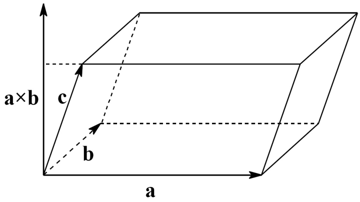
设向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{c}$，定义这三个向量的混合积

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}.$$

这是一个实数，这个实数的绝对值

$$|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}||\cos\angle(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|$$

等于以$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{c}$为棱的平行六面体的体积，如图所示。



混合积的定义

现在在直角坐标系下，设$\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，利用上一节的知识，有

$$
\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= \begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ b_1, & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} c_3 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

利用行列式的性质，可得

$$
\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) \\
= -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a})
\end{aligned}
$$

混合积的性质

利用混合积绝对值的几何意义，可以看出：$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{c}$ 三个向量共面$\Longleftrightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$.

例题 求证：$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$. (双重外积公式)

Proof （法一）利用代数方法，即行列式，证明。

（法二）利用几何方法证明（重点讲解）。