几何: 魅力及应用
(几何学历史简介)

盛为民

欧几里得几何公设

- 任意两点间可作唯一的直线.

欧几里得几何公设

- 任意两点间可作唯一的直线.
- 任何线段可以无限延长.

欧几里得几何公设

- 任意两点间可作唯一的直线.
- 任何线段可以无限延长.
- 以任一点为中心和任一距离为半径可作一圆.

欧几里得几何公设

- 任意两点间可作唯一的直线.
- 任何线段可以无限延长.
- 以任一点为中心和任一距离为半径可作一圆.
- 所有直角彼此相等.

欧几里得几何公设

- 任意两点间可作唯一的直线.
- 任何线段可以无限延长.
- 以任一点为中心和任一距离为半径可作一圆.
- 所有直角彼此相等.
- 对于一直线L和该直线外的一点P，存在唯一通过P，并和L不相交的直线。

欧几里得几何公设

…几何公设仅是一些定义。　　庞加莱

毕达哥拉斯

- 给定一个直角三角形$Rt\Delta ABC$,三边长a, b, c, 其中c为斜边, 则
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

毕达哥拉斯

- 给定一个直角三角形$Rt\Delta ABC$,三边长a, b, c, 其中c为斜边,则
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
- 该定理是几何学的一个基础.

毕达哥拉斯

- 给定一个直角三角形$Rt\Delta ABC$,三边长a, b, c, 其中c为斜边,则
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
- 该定理是几何学的一个基础.
- 三元数组(3,4,5) 在古代文明中是非常著名的。我们称(a,b,c)为毕达哥拉斯三元数组。

毕达哥拉斯三元数组

- 希腊人意识到，当$a = b = 1$时，c不是有理数，也就是说，c 不是两个整数的商。$c = \sqrt{2}$.

毕达哥拉斯三元数组

- 希腊人意识到，当$a = b = 1$时，c不是有理数，也就是说，c 不是两个整数的商。$c = \sqrt{2}$.
- 可以用下面的公式找到整数的毕达哥拉斯三元数组

$$(a, b, c) = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$$

这里$x > y$ 都是正整数。

毕达哥拉斯三元数组

- 一个困难问题：分类所有的有理数毕达哥拉斯三元数组，使其对应的直角三角形的面积为整数。这样的整数叫同余数。

毕达哥拉斯三元数组

- 一个困难问题：分类所有的有理数毕达哥拉斯三元数组，使其对应的直角三角形的面积为整数。这样的整数叫同余数。
- 同余数：例如，1，2，3，4不是；$\frac{3}{2}, \frac{20}{9}, \frac{41}{6}, 5$ 是。

同余数

- 1983年， Tunnell用Birch-Swinnerton-Dyer 猜想证明了： 如果n 是一个奇的非平方整数，n 是同余数当且仅当满足方程

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 = n$$

的三元数组(x,y,z) 的个数是满足方程

$$2x^2 + y^2 + 32z^2 = n$$

的三元数组(x,y,z) 的个数的两倍。

椭圆曲线

- 如果同余数n 是由三元数组(x,y,z)构成的直角三角形的面积，这里x,y,z 均是有理数，设

$$x = \frac{1}{4}z^2, y = \frac{1}{8}(x^2 - y^2)z$$

我们发现

$$y^2 = x^3 - n^2 x.$$

满足该方程的曲线叫椭圆曲线，它们构成一个群。

平面上二次曲线与空间二次曲面

- 平面上二次曲线与空间二次曲面的理论是我们几何学课程的一项主要内容。

平面上二次曲线与空间二次曲面

- 平面上二次曲线与空间二次曲面的理论是我们几何学课程的一项主要内容。
- 以后我们将会看到椭圆曲线在现代几何和弦理论中起着非常重要的作用。

柏拉图多面体

- 正多面体是凸体，每个面是相同的正多边形，每个顶点相连着同样数目的面。

柏拉图多面体

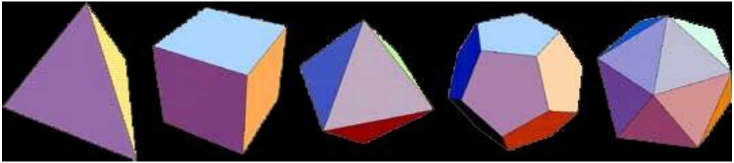
- 正多面体是凸体，每个面是相同的正多边形，每个顶点相连着同样数目的面。
- 仅有五种：正四面体，立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体。

柏拉图多面体

- 正多面体是凸体，每个面是相同的正多边形，每个顶点相连着同样数目的面。
- 仅有五种：正四面体，立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体。
- 对于柏拉图多面体:

$$V - E + F = 2$$

其中V = 顶点数，E = 边数，F = 面的数目。



欧拉数

- 欧拉注意到如果一个闭曲面能连续地形变到一个闭的多面体。分别记V,E,F,为该多面体的顶点数,边数和面数，那么

$$V - E + F = 2(1 - h)$$

这里h 是环柄个数.

欧拉数

- 欧拉注意到如果一个闭曲面能连续地形变到一个闭的多面体。分别记V,E,F,为该多面体的顶点数,边数和面数，那么

$$V - E + F = 2(1 - h)$$

  这里h 是环柄个数.
- 对于球面, h=0, $V - E + F = 2$.

欧拉数

- 欧拉注意到如果一个闭曲面能连续地形变到一个闭的多面体。分别记V,E,F,为该多面体的顶点数,边数和面数，那么

  $$V - E + F = 2(1 - h)$$

  这里h 是环柄个数.
- 对于球面, h=0, $V - E + F = 2$.
- 2(1-h) 称为欧拉数.

高斯　博涅公式

- 高斯-博涅-陈省身公式

$$\int_M K = 2\pi\chi(M)$$

高斯 博涅公式

- 高斯-博涅-陈省身公式

$$\int_M K = 2\pi\chi(M)$$

- 这类联系几何信息和拓扑量的公式在现代几何学和现代物理学中有着显著的重要性。（在物理语言中，这类公式联系着拓扑荷，拓扑缺陷。）

高斯　博涅公式

- 高斯-博涅-陈省身公式

$$\int_M K = 2\pi\chi(M)$$

- 这类联系几何信息和拓扑量的公式在现代几何学和现代物理学中有着显著的重要性。（在物理语言中，这类公式联系着拓扑荷，拓扑缺陷。）
- 这类理论建立在陈类基础上。1960年阿蒂亚-辛格作出了光辉的推广。分析和几何产生了紧密的联系。

天文测量

- 希腊天文学家将几何学应用于天文测量。例如，地球的直径（在赛伊尼的埃拉斯特尼(公元前275年-195年))。

天文测量

- 希腊天文学家将几何学应用于天文测量。例如，地球的直径（在赛伊尼的埃拉斯特尼(公元前275年-195年))。
- 对天文测量的愿望反过来又影响着几何学和三角学的发展。

文艺复兴时期

- 笛卡儿(1596-1650), 解析几何：笛卡儿坐标系

文艺复兴时期

- 笛卡儿(1596-1650), 解析几何: 笛卡儿坐标系
- 德萨格(1591-1661), 射影几何

文艺复兴时期

- 笛卡儿(1596-1650), 解析几何：笛卡儿坐标系
- 德萨格(1591-1661), 射影几何
- 费马(1601-1665), 变分原理：测地线

文艺复兴时期

- 笛卡儿(1596-1650), 解析几何: 笛卡儿坐标系
- 德萨格(1591-1661), 射影几何
- 费马(1601-1665), 变分原理: 测地线
- 牛顿(1642-1727), 莱布尼茨(1646-1716): 微积分

源于少数原理，...却结出累累硕果，这就是几何的骄傲。
牛顿

拓扑和几何的现代发展

- 欧拉(1707-1783): 多面体的欧拉公式，组合几何，变分分析，几何与力学，极小曲面。

拓扑和几何的现代发展

- 欧拉(1707-1783): 多面体的欧拉公式，组合几何，变分分析，几何与力学，极小曲面。
- 高斯(1777-1855): 双曲几何(和罗巴切夫斯基(1792-1856), 波尔约(1802-1829)一起)，高斯曲率的内蕴定义。)

拓扑和几何的现代发展

- 欧拉(1707-1783): 多面体的欧拉公式，组合几何，变分分析，几何与力学，极小曲面。
- 高斯(1777-1855): 双曲几何(和罗巴切夫斯基(1792-1856), 波尔约(1802-1829)一起)，高斯曲率的内蕴定义。)
- 高斯(1817): 我越来越确信几何的必然性无法被验证，至少现在无法被人类或为了人类而验证。我们或许能在未来领悟到那无法知晓的空间的本质。
  我们无法把几何和纯粹是先验的算术归为一类。几何和力学却不可分割。

黎曼(1826-1866)

- 在抽象定义的空间上引入黎曼度量

黎曼(1826-1866)

- 在抽象定义的空间上引入黎曼度量
- 导致了几何学的革命。克里斯托费尔，列维-齐维塔，比安基……，发展了这类抽象空间上的微积分。

黎曼(1826-1866)

- 在抽象定义的空间上引入黎曼度量
- 导致了几何学的革命。克里斯托费尔，列维-齐维塔，比安基……，发展了这类抽象空间上的微积分。
- 黎曼几何受到广泛重视，是由于Einstein的广义相对论。

爱因斯坦

- 黎曼几何被爱因斯坦(在Grassmann、Hilbert帮助下)用来描述广义相对论。广义相对论融合了狭义相对论和引力。

爱因斯坦

- 黎曼几何被爱因斯坦(在Grassmann、Hilbert帮助下)用来描述广义相对论。广义相对论融合了狭义相对论和引力。
- 爱因斯坦方程

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij}$$

这里T_{ij}是物质张量（引力由度量g_{ij}的全部的曲率张量来描述），R_{ij} 和R分别是Ricci曲率张量和纯量曲率。

爱因斯坦

- 黎曼几何被爱因斯坦(在Grassmann、Hilbert帮助下)用来描述广义相对论。广义相对论融合了狭义相对论和引力。
- 爱因斯坦方程

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij}$$

  这里T_{ij}是物质张量（引力由度量g_{ij}的全部的曲率张量来描述），R_{ij} 和R分别是Ricci曲率张量和纯量曲率。
- 爱因斯坦方程对几何学家们启发深刻。这是一个高度非线性理论。（g_{ij} 是引力位势，是未知量）。

爱因斯坦

- 黎曼几何被爱因斯坦(在Grassmann、Hilbert帮助下)用来描述广义相对论。广义相对论融合了狭义相对论和引力。
- 爱因斯坦方程

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij}$$

  这里T_{ij}是物质张量（引力由度量g_{ij}的全部的曲率张量来描述），R_{ij} 和R分别是Ricci曲率张量和纯量曲率。
- 爱因斯坦方程对几何学家们启发深刻。这是一个高度非线性理论。（g_{ij} 是引力位势，是未知量）。
- 几何学在广义相对论和理论物理中的应用，是现代几何学研究的重要内容。

爱因斯坦

- 黎曼几何被爱因斯坦(在Grassmann、Hilbert帮助下)用来描述广义相对论。广义相对论融合了狭义相对论和引力。
- 爱因斯坦方程

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij}$$

  这里T_{ij}是物质张量（引力由度量g_{ij}的全部的曲率张量来描述），R_{ij} 和R分别是Ricci曲率张量和纯量曲率。
- 爱因斯坦方程对几何学家们启发深刻。这是一个高度非线性理论。（g_{ij} 是引力位势，是未知量）。
- 几何学在广义相对论和理论物理中的应用，是现代几何学研究的重要内容。
- 时空、物质、能量、质量（正质量定理），Calabi-Yau空间，弦理论，...

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 一位数学史家曾经如此形容1854年出生的亨利·庞加莱(Henri Poincare): "有些人仿佛生下来就是为了证明天才的存在似的，每次看到亨利，我就会听见这个恼人的声音在我耳边响起。"
  庞加莱作为数学家的伟大，并不完全在于他解决了多少问题，而在于他曾经提出过许多具有开创意义、奠基性的大问题。庞加莱猜想，就是其中的一个。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 1904年，庞加莱在一篇论文中提出了一个看似很简单的拓扑学猜想:在一个三维空间中，假如每一条封闭的曲线都能收缩到一点，那么这个空间一定是一个三维的圆球。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 1904年，庞加莱在一篇论文中提出了一个看似很简单的拓扑学猜想:在一个三维空间中，假如每一条封闭的曲线都能收缩到一点，那么这个空间一定是一个三维的圆球。
- 庞加莱一度认为，自己已经证明了它。但没过多久，证明中的错误就被暴露了出来。于是，拓扑学家们开始了证明它的努力。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 20世纪30年代以前，庞加莱猜想的研究只有零星几项。但突然，英国数学家怀特黑德(Whitehead)对这个问题产生了浓厚兴趣。他一度声称自己完成了证明，但不久就撤回了论文。失之桑榆、收之东隅的是，在这个过程中，他发现了三维流形的一些有趣的特例，而这些特例，现在被统称为怀特黑德流形。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 20世纪30年代以前，庞加莱猜想的研究只有零星几项。但突然，英国数学家怀特黑德(Whitehead)对这个问题产生了浓厚兴趣。他一度声称自己完成了证明，但不久就撤回了论文。失之桑榆、收之东隅的是，在这个过程中，他发现了三维流形的一些有趣的特例，而这些特例，现在被统称为怀特黑德流形。
- 50年代到60年代之间，又有一些著名的数学家宣称自己解决了庞加莱猜想，著名的宾(R.Bing)、哈肯(Haken)、莫伊泽(Moise)和帕帕奇拉克普罗斯(Papa-kyriakopoulos)均在其中。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 帕帕奇拉克普罗斯是1964年的维布伦奖得主，一名希腊数学家。因为他的名字超长超难念，大家都称呼他"帕帕"(Papa)。在1948年以前，帕帕一直与数学圈保持一定的距离，直到被普林斯顿大学邀请做客。帕帕以证明了著名的"迪恩引理"(Dehn's Lemma)而闻名于世，然而，这位聪明的希腊拓扑学家，却折在了庞加莱猜想的证明上。在普林斯顿大学流传着一个故事。直到1976年去世前，帕帕仍在试图证明庞加莱猜想，临终之时，他把一叠厚厚的手稿交给了一位数学家朋友，然而，只是翻了几页，那位数学家就发现了错误，但为了让帕帕安静地离去，最后选择了隐忍不言。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 这一时期拓扑学家对庞加莱猜想的研究，虽然没能产生他们所期待的结果，但是，却因此发展出了低维拓扑学这门学科。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 这一时期拓扑学家对庞加莱猜想的研究，虽然没能产生他们所期待的结果，但是，却因此发展出了低维拓扑学这门学科。
- 1961年的夏天, 斯梅尔公布了自己对庞加莱猜想的五维和五维以上的证明, 1966年斯梅尔(Smale)获得菲尔茨奖。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 这一时期拓扑学家对庞加莱猜想的研究，虽然没能产生他们所期待的结果，但是，却因此发展出了低维拓扑学这门学科。
- 1961年的夏天, 斯梅尔公布了自己对庞加莱猜想的五维和五维以上的证明, 1966年斯梅尔(Smale)获得菲尔茨奖。
- 10多年之后的1983年，美国数学家福里德曼(Freed man)将证明又向前推动了一步。在唐纳森工作的基础上，他证出了四维空间中的庞加莱猜想，并因此获得菲尔茨奖。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 拓扑学的方法研究三维庞加莱猜想没有进展，有人开始想到了其他的工具。瑟斯顿(Thruston)就是其中之一。他引入了几何结构的方法对三维流形进行切割，并因此获得了1983年的菲尔茨奖。

庞加莱(Poicaré)与庞加莱猜想

- 拓扑学的方法研究三维庞加莱猜想没有进展，有人开始想到了其他的工具。瑟斯顿(Thruston)就是其中之一。他引入了几何结构的方法对三维流形进行切割，并因此获得了1983年的菲尔茨奖。
- 人们在期待一个新的工具的出现。1979年，在康奈尔大学的一个讨论班上，汉密尔顿刚刚在做Ricci流. Ricci流，以意大利数学家Gregorio Ricci命名的一个方程。用它可以完成一系列的拓扑手术，构造几何结构，把不规则的流形变成规则的流形，从而解决三维的庞加莱猜想。

"The search of truth, scientific and moral, should be the goal of our activities; it is the sole end worthy of them. ... To find the truth, it is necessary to free the soul completely from prejudice and from passion; it is necessary to attain absolute sincerity. These two sorts of truth when discovered give the same joy; each when perceived beams with the same splendor, so that we must see it or close our eyes."

Jules Henri Poincar é "The Value of Science"